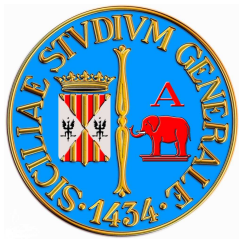
Strani fenomeni in sistemi a bassa dimensionalità

R. Pucci

G. G. N. Angilella, I. Deretzis, A. La Magna, F. M. D. Pellegrino,
G. Piccitto, F. Siringo,
G. Forte, A. Grassi, G. M. Lombardo,
N. H. March, F. Flores Sintas, R. G. Parr, A. Sudbø, A. A. Varlamov



Dipartimento di Fisica e Astronomia,
Università di Catania
CNR-IMM, Catania

IMM

Nella prima metà del '900 si ebbero successi nella comprensione dei solidi con

- Teoria a bande
- Transizioni di fase
- Teoria di Landau dei liquidi di Fermi

Nella seconda metà del '900, difficoltà con

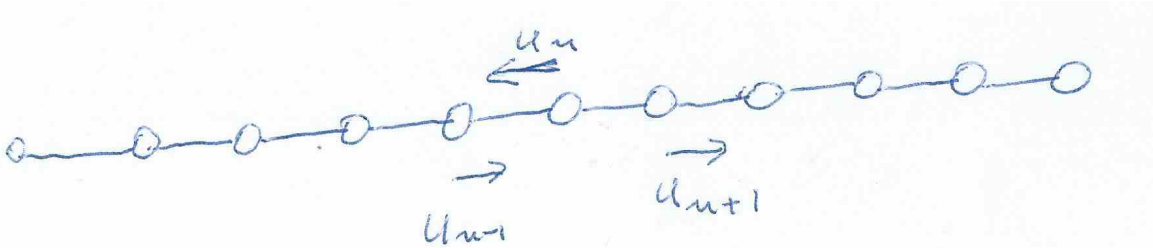
- Sistemi a bassa dimensionalità (1D, 2D)

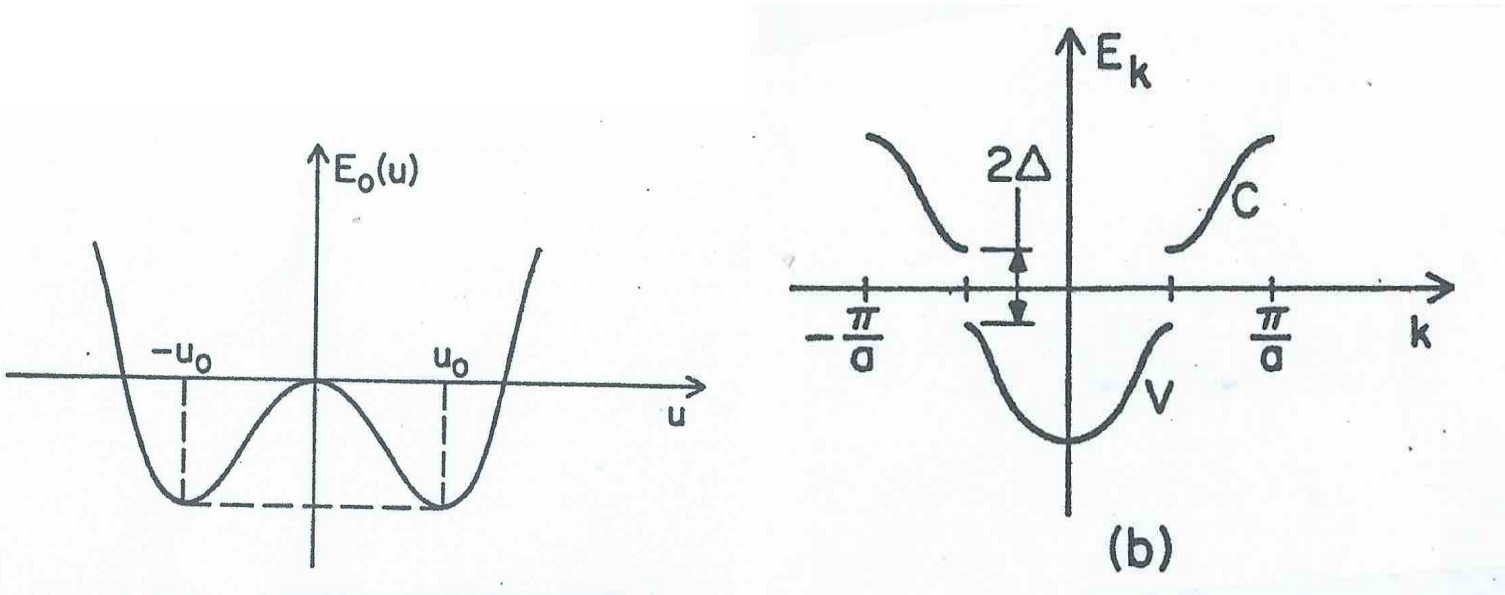
Il mondo in una (1D) o due (2D) dimensioni spaziali è molto diverso dal mondo in tre dimensioni (3D). A bassa dimensionalità appaiono nuovi fenomeni, che possono essere spiegati solo ricorrendo a nuove idee, nuove quasiparticelle e nuove metodologie. Si fa spesso uso di una nuova branca della matematica detta topologia, cioè lo studio delle forme e della loro disposizione spaziale.

(Scelta personale degli argomenti)

Instabilità di Peierls (1955)

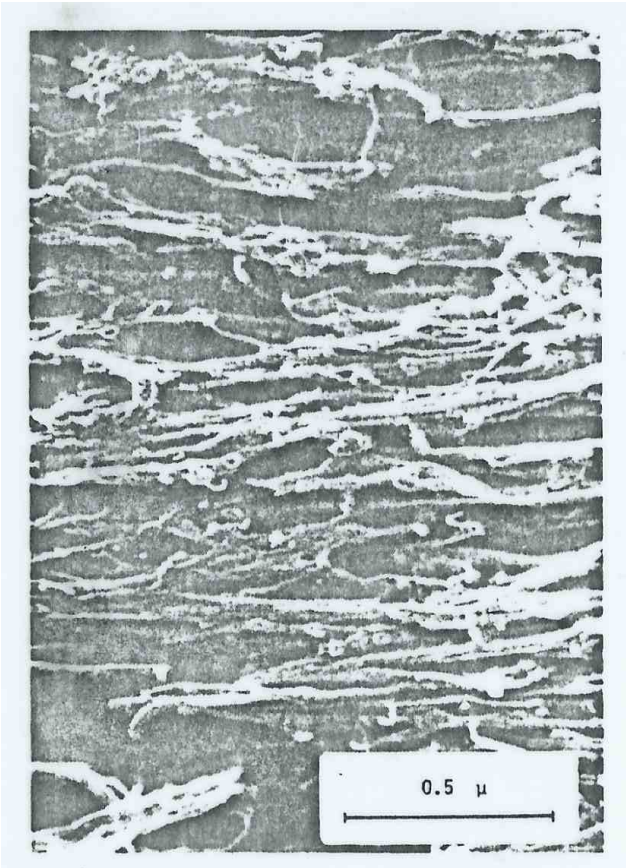
Catena monoatomica 1D



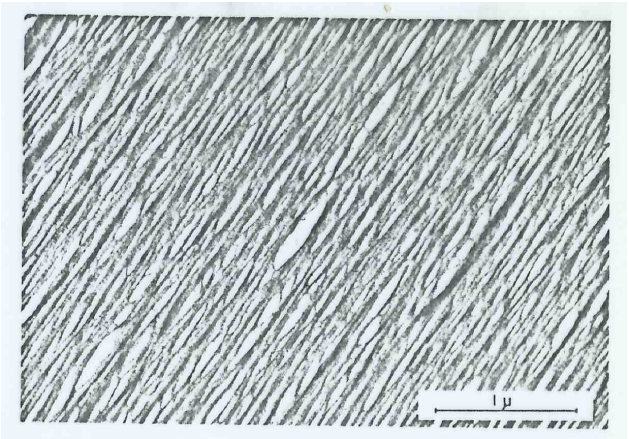


Non un metallo (teoria a bande) ma un isolante

Micrografia elettronica di un film di poliacetilene allineato per stiramento.



Micrografia elettronica di poliacetilene polimerizzato per *shear flow*.

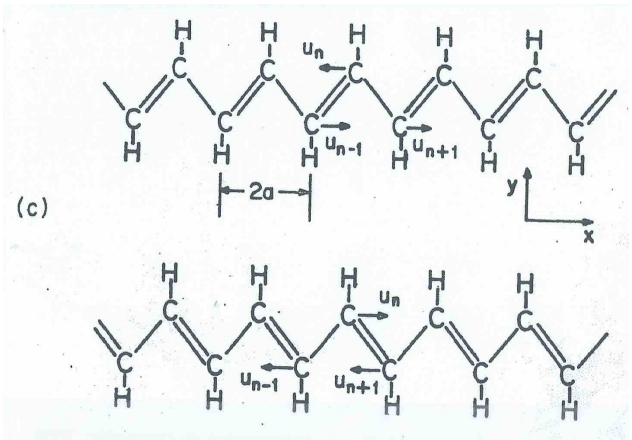


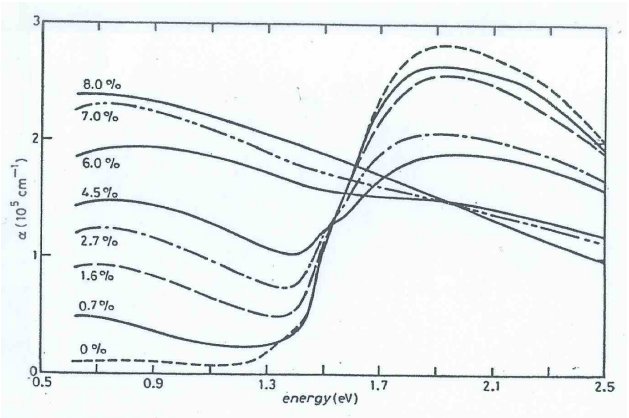
(Shirakawa and Ikeda)

Trans poliacetilene

$(CH)_x$: $\langle u_n \rangle \simeq 0.03$ Å,
$a = 1.22$ Å

Assorbimento ottico in funzione della frequenza per trans $(CH)_x$ puro.





Transizione di Mott (1949)

- È una transizione metallo-isolante dovuta alle correlazioni elettroniche (*Es.*, Hg)
- Parametri essenziali:
  - U: parametro di Hubbard
  - W: larghezza di banda
- Importanza nel poliacetilene: interplay tra Mott e Peierls

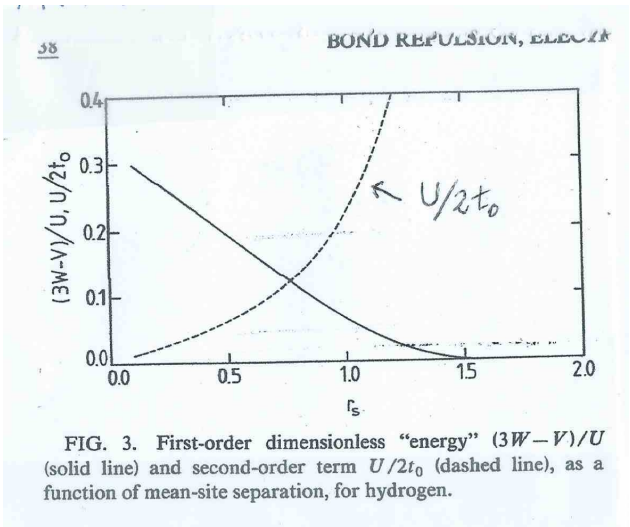


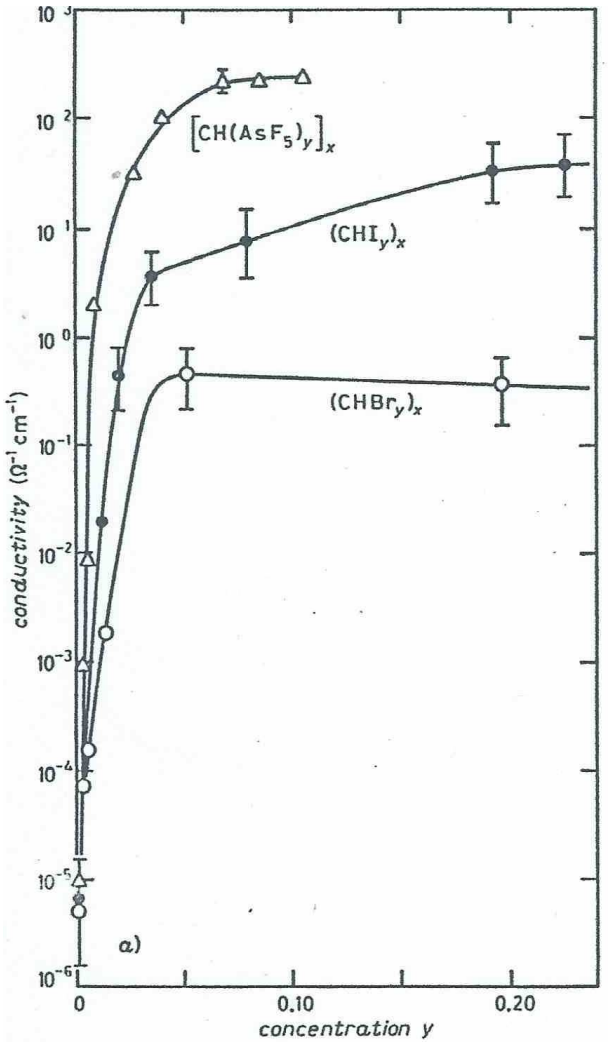
FIG. 3. First-order dimensionless "energy" $(3W-V)/U$ (solid line) and second-order term $U/2t_0$ (dashed line), as a function of mean-site separation, for hydrogen.

- Per $\frac{3W-V}{U} > 0.27\frac{U}{2t_0}$ la repulsione di Coulomb si oppone alla dimerizzazione
- Rilevanza per i solidi sotto pressione

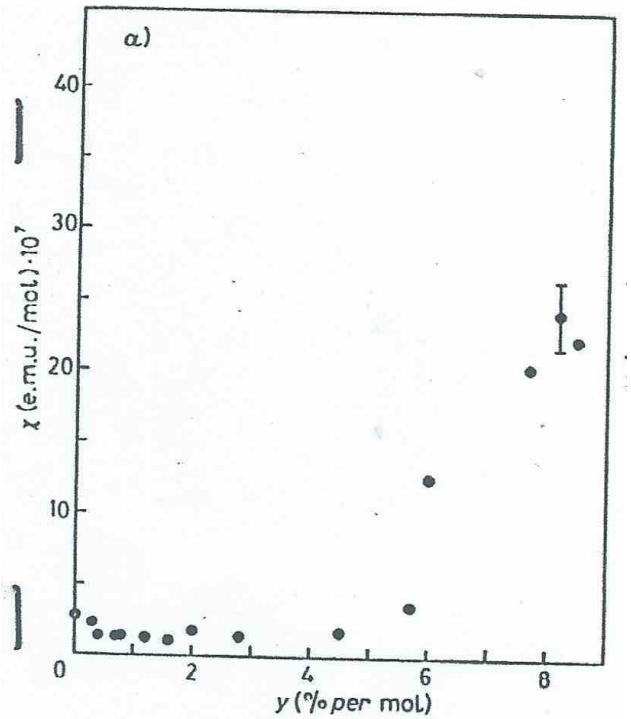
Pucci, Siringo, March (1988)

Proprietà di trasporto

Conducibilità in funzione della concentrazione di drogante

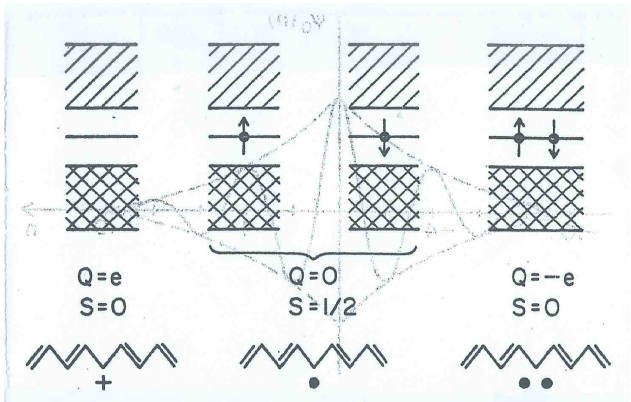


Suscettività di spin di Pauli in $[CH(Na)_y]_x$



Il modello di Su, Schrieffer, Heeger (1980)

$$H = H_\pi + H_{\mathrm{ph}} + H_{\pi-\mathrm{ph}} \quad \text{(tight binding)}$$



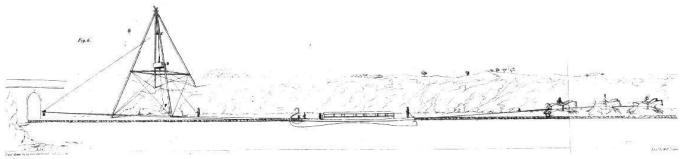
- Si ritrova l'instabilità di Peierls
- Stato fondamentale: CDW, SDW

- Il drogaggio causa diversi tipi di difetti topologici (dove non si ha pià perfetta dimerizzazione)
- Solitoni
- Si possono estendere per diversi siti reticolari
- Possono propagarsi lungo la catena

Solitoni in natura

- 1834, Union Canal at Hermiston, very close to the Riccarton campus of Heriot-Watt University, Edinburgh.

> *I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped - not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the Wave of Translation'*



John Scott Russell, *Report on Waves* (Report of the 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science, York, September 1844 (London 1845), p. 311-390, Plates XLVII-LVII).

Solitoni in natura

- Interazione obliqua di due solitoni in acqua bassa, osservata al largo delle coste dell'Oregon

Foto di T. Toedtemeier

Alpha-helix

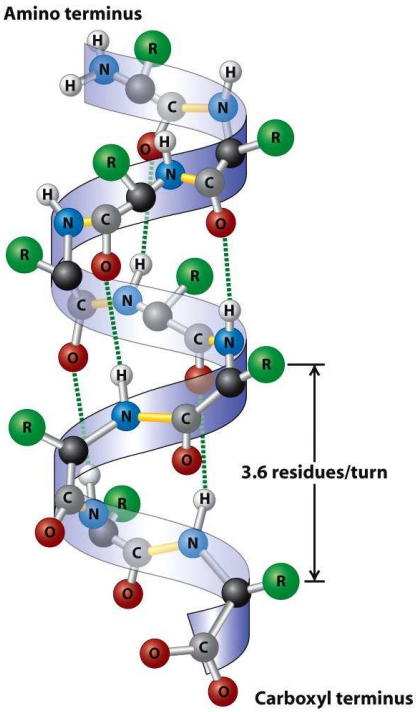


Figure 3-4
Molecular Cell Biology, Sixth Edition
© 2008 W. H. Freeman and Company

- È una proteina degli organismi viventi
- È una molecola polimerica ($\sim$ 20 diverse unità strutturali)
- Teorie di risposta lineare:
  Newton, Maxwell, Schrödinger
- Eccitazioni collettive (onde sonore)
- Eccitazioni elementari (fononi, eccitoni)
- Pacchetti d'onda in mezzi dispersivi
- Nonlinearità: solitoni, polaroni

Equazione di Schrödinger nonlineare in 1D

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + G|\phi|^2 \right) \phi(x,t) = 0$$

- G è il parametro di nonlinearità

A. S. Davydov, Phys. Status Solidi **36**, 211 (1969)

- Approssimazione adiabatica e fononi acustici: solitone

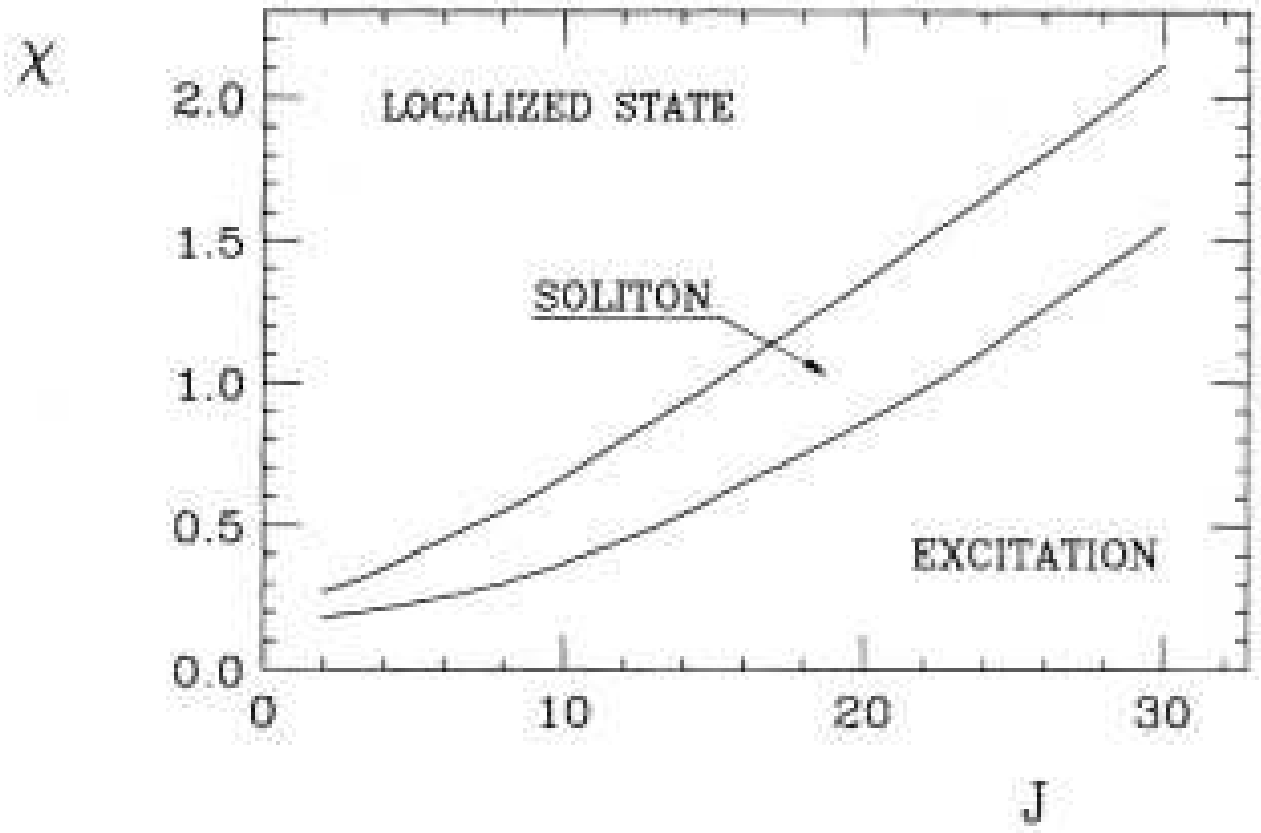
$$\phi(x,t) \propto \operatorname{sech}\left[\frac{maG}{\hbar^2}(x - vt)\right]$$

  a = passo reticolare, v = velocità del solitone

- Importante per spiegare ad es. il meccanismo per la contrazione dei muscoli
- Numerose altre applicazioni della nonlinearità: fibre ottiche, fenomeni atmosferici, caos, (superconduttori ad alta T_c)

Soliton in 2D su reticolo

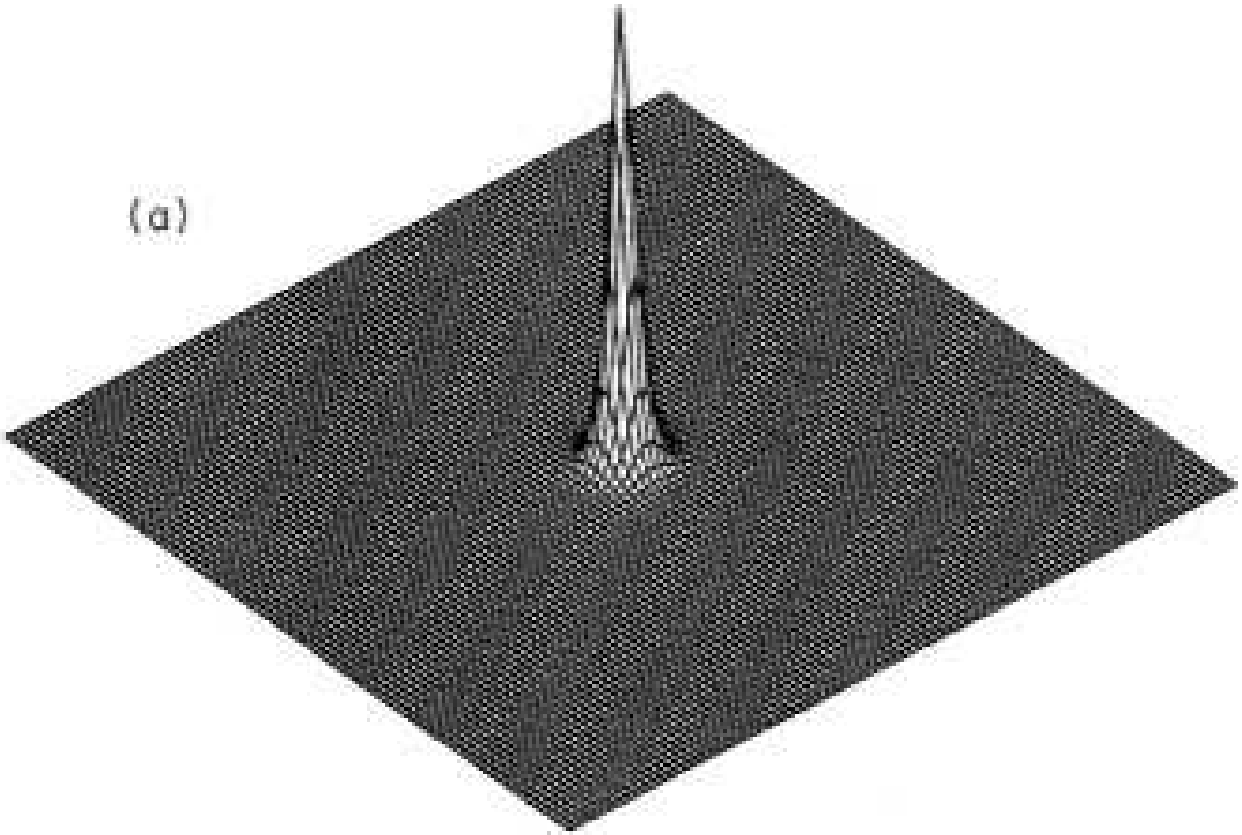
Nonlinearità χ (in N/m) *vs hopping* J (in 10^{-22} J)



La Magna, Pucci, Piccitto, Siringo, Phys. Rev. B **52**, 15273 (1995)

Ground-state excitation density $|\phi_{ij}|^2$

$\kappa = 13$ N/m, $J = 1.55 \cdot 10^{-22}$ J, $\chi = 0.16$ N/m, 100×100 siti



La Magna, Pucci, Piccitto, Siringo, Phys. Rev. B **52**, 15273 (1995)

Angilella, Piccitto, Pucci, Siringo, Phys. Lett. A **205**, 407 (1995)

Il modello a polaroni

- Tale modello ha avuto maggiore successo di quello a solitoni nel campo dei superconduttori ad alta T_c
- Un polarone è ad es. un elettrone che distorce fortemente il reticolo e si muove insieme alla sua polarizzazione auto-indotta (es.: cristallo ionico)
- Ha origini più lontane del solitone

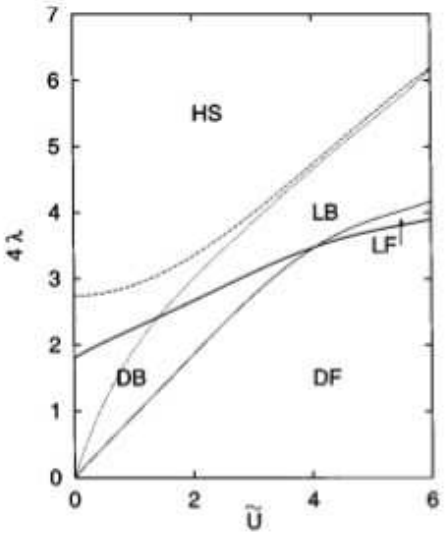
Landau (1933); Frölich (1954); Feynman (1955)

- Nei superconduttori ad alta T_c è stato ampiamente tenuto in considerazione

A. S. Alexandrov e N. F. Mott, Rep. Prog. Phys. **57**, 1197 (1995)

- Noi abbiamo affrontato i problemi
  1. Esiste il polarone in 2D?
  2. Esiste il bipolarone in 2D?

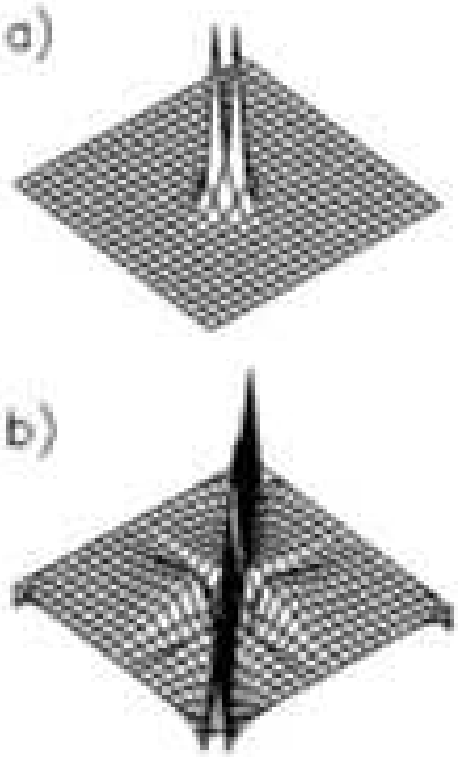
Il bipolarone in 2D su reticolo



- λ: accoppiamento *e-ph* (nonlinearità)
- U: parametro di Hubbard
- J: *hopping*
- $\gamma = 0.5$: non adiabaticità
- F: libero
- B: legato
- D: delocalizzato
- L: localizzato
- HS: massa efficare molto alta: *heavy fermions, Anderson's localization*

La Magna e Pucci, Phys. Rev. B **55**, 14886 (1997)

Mobile intersite bipolaron in the discrete Holstein-Hubbard model



(a) Modulo quadro della funzione d'onda della particella, $\gamma = 0.5$, $\tilde{U} = 4.0$, $\lambda = 1.0$

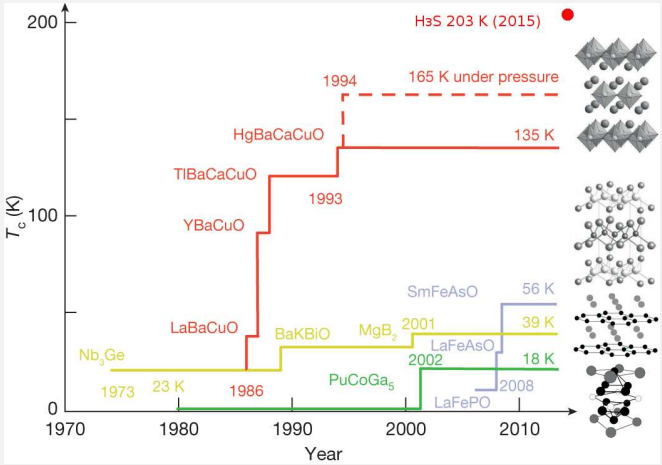
(b) Potenziale effettivo a due corpi

La Magna e Pucci, Phys. Rev. B **55**, 14886 (1997)

Superconduttività

- H. Kammerlingh Onnes (1911) trova che nel Hg esiste una temperatura critica T_c al di sotto della quale gli elettroni fluiscono indisturbati ($R \to 0$)
- Il superconduttore non è solo un conduttore perfetto, ma anche un diamagnete perfetto (effetto Meissner-Ochsenfeld, 1933). Dentro un superconduttore, i fotoni acquistano massa (meccanismo di Anderson-Higgs)
- Prime teorie fenomenologiche, di cui la più importante è quella di Ginzburg-Landau (1950)
- È una transizione di fase (gas di Fermi $\to$ coppie di Cooper) il cui parametro d'ordine è la gap, Δ
- Bisognerà aspettare sino al 1957 per avere una teoria microscopica (BCS: Bardeen, Cooper, Schrieffer)
- Coppie di Cooper: attrazione tra elettroni mediata da fononi virtuali

I superconduttori ad alta T_c



Keimer *et al.*, Nature (2015)

Drozdov, Eremets *et al.*, Nature (2015)

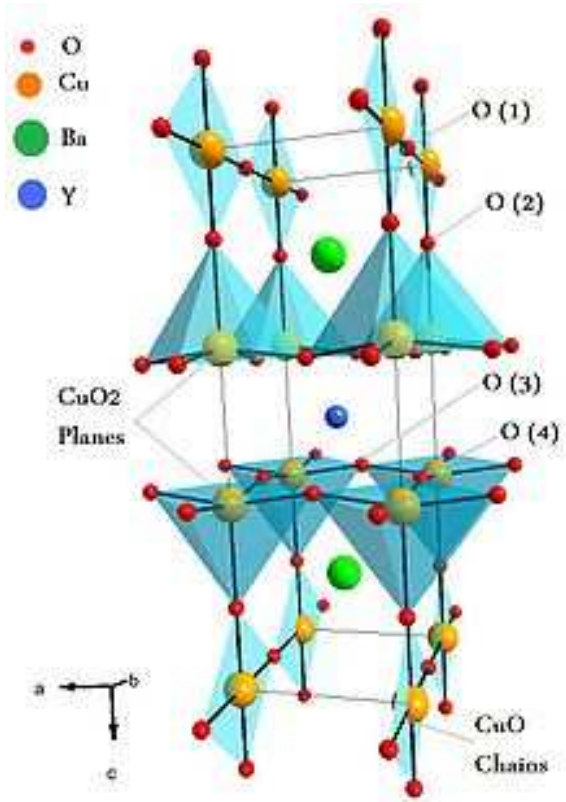
- $LaBaCuO$ ($T_c \sim 30$ K)

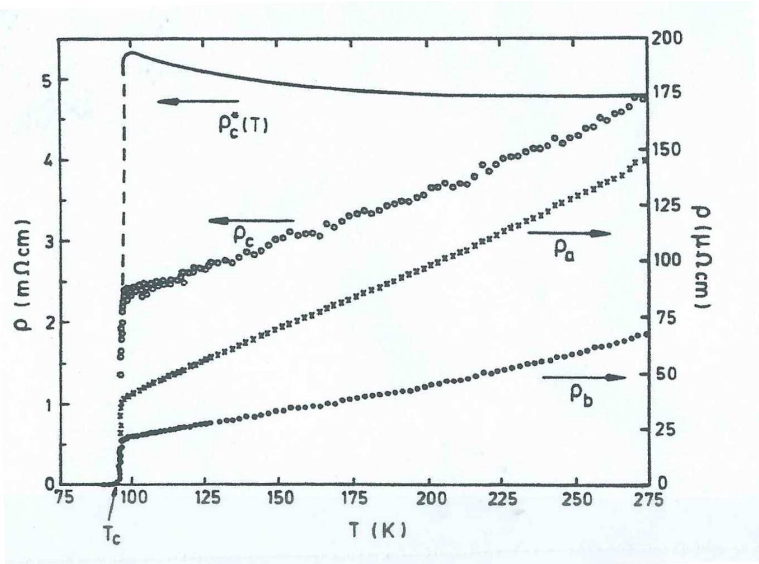
  Bednorz and Müller, 1986
- $YBa_2Cu_2O_7$ ($T_c = 92$ K)

  Wu and Chu, 1987
- H_3S ($T_c = 203$ K)

  Drozdov, Eremets *et al.*(2015)
- Superconduttività con N_2 liquido
- Essenziale il drogaggio, es. $YBa_2Cu_2O_{6+x}$ $(0 < x < 1)$
- Effetto isotopico assente o trascurabile, $T_c \propto M^{\alpha}$
- Non c'è ancora una teoria soddisfacente che riesca a spiegare gli HTSC

Struttura e proprietà degli HTSC





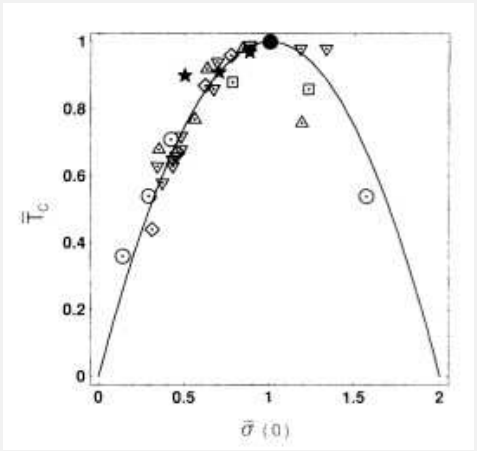
Resistività dell'YBCO lungo le tre direzioni cristallografiche principali a, b, c. ρ^* si riferisce a $YBa_2Cu_3O_6$.

Cyrot and Pavuna (1992)

Sistemi fortemente anisotropici: quasi-2D.
Anche la lunghezza di coerenza ξ delle coppie è molto più grande nei piani CuO_2 che nella direzione perpendicolare, $(\xi_c/\xi_{ab})^2 \simeq 0.07$.

Universal trends

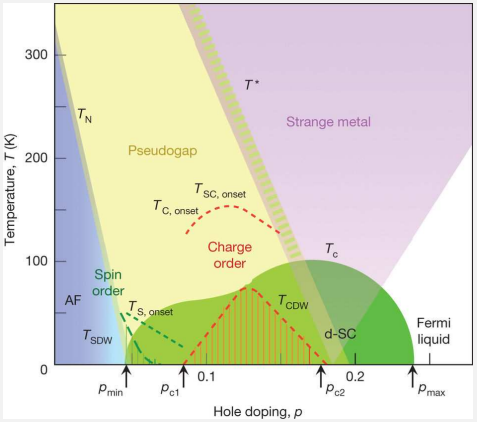
Sarà possibile trovare un meccanismo di pairing comune (come nella BCS) alla maggioranza degli HTSC? Alcuni andamenti sperimentali lo fanno sperare.



Universal correlation between T_c and hole content. Plot of T_c vs $\sigma(0)$, both normalized with respect to their values at optimal doping, for various cuprates and Chevrel phases.

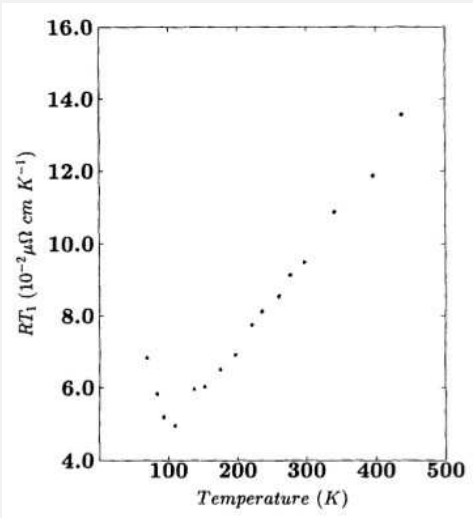
Schneider and Keller, 1992

Diagramma di fase



Schema del diagramma di fase degli HTSC

Keimer *et al.* Nature (2015)



Prodotto fra la resistività elettrica intralayer $\rho_{ab} \equiv R$ ed il tempo di rilassamento spin-reticolo T_1 in funzione della temperatura T in $YBa_2Cu_4O_8$. Il regime a liquido di Fermi in un sistema 2D prevede $RT_1 \propto T$. Questo nel nostro caso è valido solo per $T > 150$ K, cioè ben al di sopra della temperatura T_c. Formazione di coppie sopra T_c?

March, Pucci, Egorov (1994)

Interlayer pair tunneling (ILT) in the cuprates

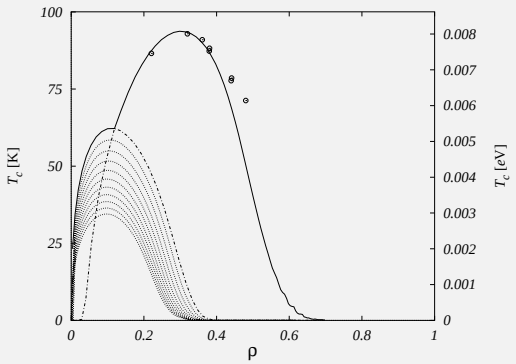
Compound	n	a [Å]	b [Å]	c [Å]	T_c [K]	Space group
Bi-2201	1	5.36	5.37	24.622	9	Amaa
Bi-2212	2	5.41	5.41	30.91	89 – 90	Fmmm
Bi-2223	3	5.39	5.39	37.1	107 – 110	Bbmb
Tl-1201	1	3.85	3.85	9.637	–	P4/mmm
Tl-1212	2	3.85	3.85	12.754	103	P4/mmm
Tl-1223	3	3.84	3.84	15.871	110	P4/mmm
Tl-2201	1	3.87	3.87	23.24	85	I4/mmm
Tl-2212	2	3.86	3.86	29.32	99 – 110	I4/mmm
Tl-2223	3	3.85	3.85	35.88	125 (131[a])	I4/mmm
Hg-1201	1	3.86	3.86	9.5	94 (155[b], 164[c])	P4/mmm
Hg-1212	2	3.86	3.86	12.6	123	P4/mmm
Hg-1223	3	3.86	3.86	15.7	133	P4/mmm

Structural properties and critical temperatures T_c in multilayered cuprate series. (a) Under pressure $P = 7$ GPa. (b) At $P = 25$ GPa. (c) At $P = 30$ GPa. Poole (1995)

Chakravarty *et al.* (1993) e Anderson (1997) hanno costruito un modello (ILT), che evidenzia numerose peculiarità degli HTSC rispetto alla BCS. La T_c dipende fortemente dal numero di piani CuO_2. Anderson dimostra che, a causa della natura non convenzionale del liquido elettronico, il tunneling tra i piani CuO_2 è inibito a particelle singole, mentre è permesso a coppie di particelle aventi carattere di singoletto (separazione carica-spin). Tali coppie possono accedere ai gradi di libertà dinamici (varia l'energia cinetica e si abbassa l'energia totale). Il modello ILT spiega gli alti valori di T_c ed altre proprietà, ma sottostima l'energia di condensazione (Moler *et al.*, 1998).

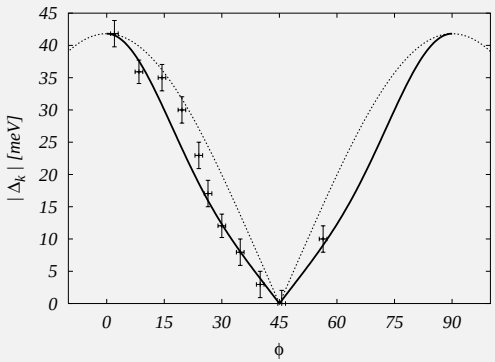
Simmetria del parametro d'ordine

Nella BCS, il parametro d'ordine o gap $\Delta_{\mathbf{k}}$ ha simmetria *s*-wave, mentre nei cuoprati vi è stata una lunga controversia tra gap con simmetria *s* e gap con simmetria *d*. Conoscere la simmetria della gap è importante, perché potrebbe fornire indicazioni sul meccanismo microscopico di formazione delle coppie.



Usando un modello di Hubbard esteso, si è studiata anche la dipendenza di T_c dalla pressione.

Angilella *et al.* (1996)



$|\Delta_{\mathbf{k}}|$ in funzione dell'angolo ϕ fra k e la direzione ΓX nella 1BZ. Linea continua: modello di Hubbard esteso con ILT. I dati sperimentali (ARPES) riguardano Bi2212 underdoped.

Mesot *et al.* (1998), Angilella *et al.* (2000)

Modello di gas su reticolo

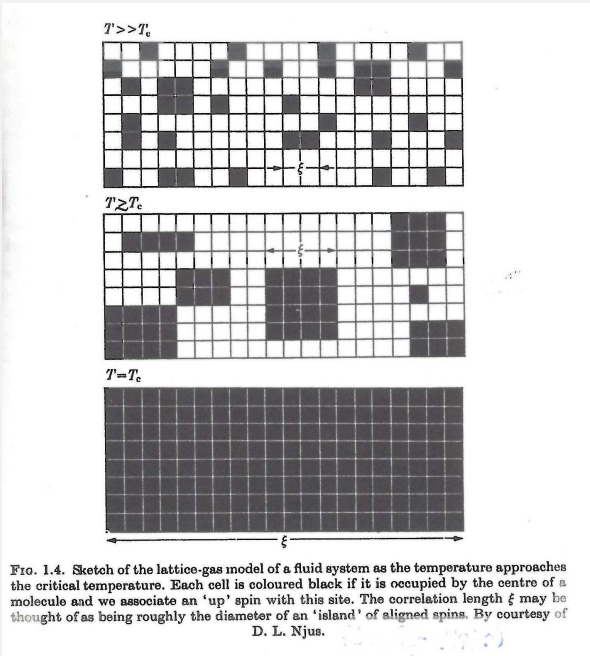


FIG. 1.4. Sketch of the lattice-gas model of a fluid system as the temperature approaches the critical temperature. Each cell is coloured black if it is occupied by the centre of a molecule and we associate an 'up' spin with this site. The correlation length ξ may be thought of as being roughly the diameter of an 'island' of aligned spins. By courtesy of D. L. Njus.

Stanley (1970)

A causa dell'interazione tra le particelle, le transizioni di fase si possono studiare utilizzando un'*analogia* tra un fluido e un sistema ferromagnetico. Si suddivide il volume V contenente il fluido in cellette il cui volume è circa pari alle dimensioni delle molecole. Si costruisce un analogo sistema magnetico considerando ciascuna cella come un sito reticolare su cui è posto un momento magnetico M. M punta in alto se la corrispondente cella di fluido è occupata, altrimenti punta in basso. Per $T \gg T_c$, il moto libero delle molecole del fluido corrisponderà ad un *flipping* random dei momenti magnetici. Per $T \gtrsim T_c$ appaiono piccole *gocce* di spin correlati. Avvicinandosi a T_c le dimensioni delle gocce crescono (fenomeno dell'opalescenza critica: coesistenza delle fasi). Per $T < T_c$ la lunghezza di coerenza ξ diventa molto grande ($\xi \sim V^{1/3}$) e si sviluppa ordine a lungo raggio (ODLRO). L'ODLRO è una caratteristica essenziale, ad es., della fase superfluida.

Modello XY in 2D

È uno dei *toy models*, così detti per la loro semplicità, ma che spesso hanno fornito una profonda comprensione della materia condensata. Il modello consiste in rotori planari di lunghezza unitaria in un reticolo 2D quadrato. L'Hamiltoniana del sistema è data da

$$H_{XY} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j),$$

dove $\langle i, j \rangle$ indica che la sommatoria si estende solo su tutti i siti primi vicini del reticolo, e θ_i indica l'angolo del rotore nel sito i rispetto a qualche direzione polare (arbitraria) nello spazio vettoriale 2D contenente i rotori. La costante J determina la forza dell'interazione. Le θ_i possono indicare la direzione degli spin o la fase di un superfluido. In un superfluido il parametro d'ordine può essere espresso da $\psi = \sqrt{\rho_s} e^{i\theta}$, dove ρ_s è la densità del superfluido e θ la fase.
La classe di universalità di una transizione è determinata dalla dimensione del sistema e dalla natura del parametro d'ordine. Transizioni della stessa classe possono essere descritte dalla stessa teoria.

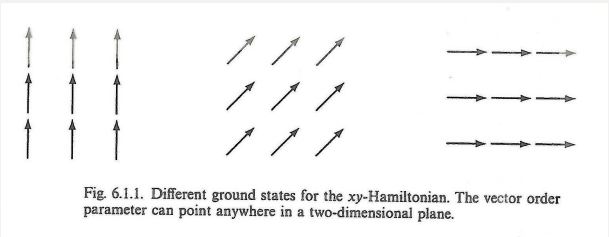


Fig. 6.1.1. Different ground states for the *xy*-Hamiltonian. The vector order parameter can point anywhere in a two-dimensional plane.

La transizione di Berezinskii, Kosterlitz e Thouless (BKT)

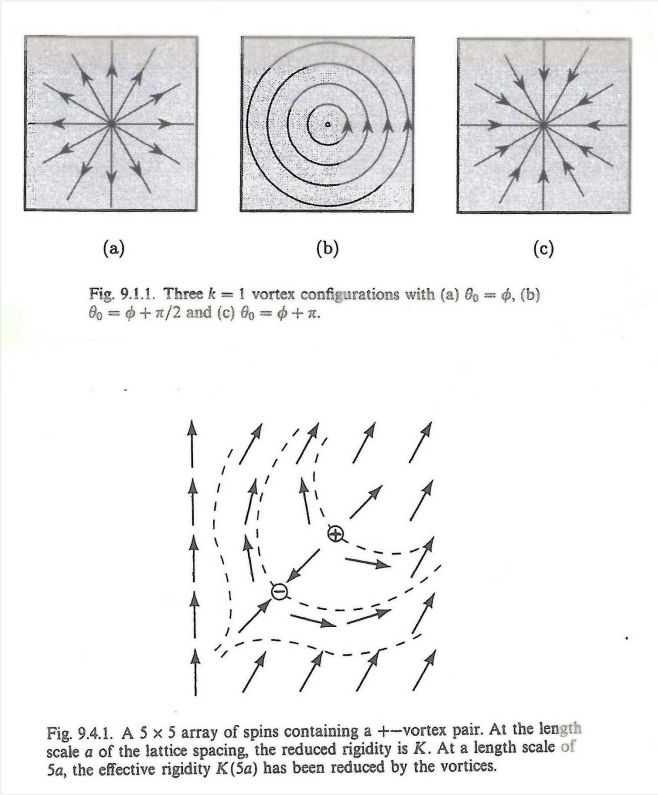


Fig. 9.1.1. Three $k = 1$ vortex configurations with (a) $\theta_0 = \phi$, (b) $\theta_0 = \phi + \pi/2$ and (c) $\theta_0 = \phi + \pi$.

Fig. 9.4.1. A 5×5 array of spins containing a +–vortex pair. At the length scale a of the lattice spacing, the reduced rigidity is K. At a length scale of $5a$, the effective rigidity $K(5a)$ has been reduced by the vortices.

Nel modello XY si possono formare *difetti topologici*, che però non sono i solitoni, ma i vortici. La formazione di singoli vortici rompe l'ordine a lungo range dello stato fondamentale, per cui è necessaria un'elevata energia rispetto alle fluttuazioni termiche, e quindi non si possono formare a bassa temperatura. Uno dei punti cruciali di BKT è che è richiesta un'energia molto più bassa per formare coppie vortice-antivortice e che queste quindi si possono formare anche a bassissime temperature. Inoltre tali coppie mantengono un ordine quasi a lungo range. Partendo da $T = 0$ ed aumentando la temperatura, si arriva però ad una temperatura T_c in cui le coppie vortice-antivortice si rompono e si passa ad un sistema disordinato: è questa la transizione BKT.

Il salto universale

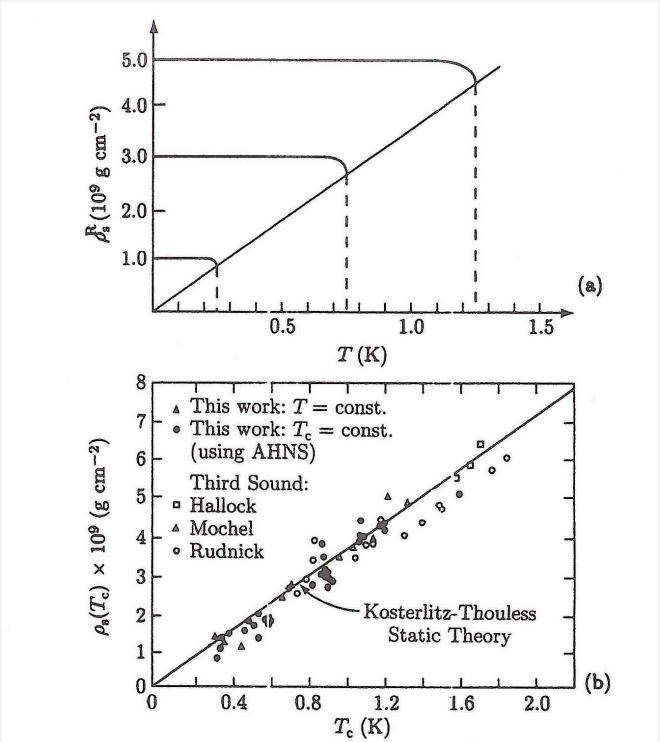


Fig. 9.4.4. (a) Schematic representation of the superfluid density $\rho_s(T)$ as a function of T for films of varying height, substrate, etc. All curves terminate on a universal line with slope given by Eq. (9.4.49). (b) $\rho_s(T_c^-)$ as a function of T_c^- as determined by third sound and torsion oscillator measurements. [D.J. Bishop and J.D. Reppy, *Phys. Rev. Lett.* 40, 1727 (1978).]

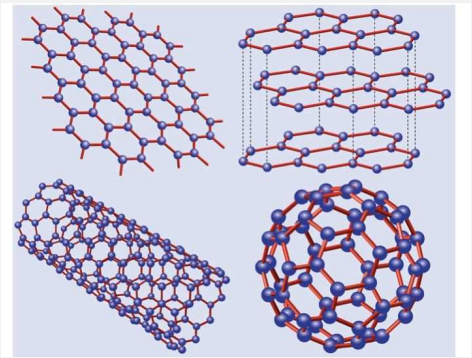
La transizione BKT non è quindi dovuta ad una rottura spontanea della simmetria, come nelle transizioni di fase, ma alla rottura dei legami delle coppie vortice-antivortice. La previsione più sconvolgente della teoria BKT è quella del salto universale. Esemplificando nel caso di film di elio, si trova la relazione

$$\frac{\rho_s(T_c^-)}{T_c} = \frac{2m^2}{\pi\hbar^2 k_B}$$

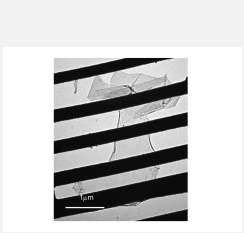
che implica che, pur avendo la densità del superfluido ρ_s valori molto diversi a $T = 0$ in film diversi, le curve $\rho_s(T)$ debbono tutte terminare a T_c^- su una linea che ha una pendenza *universale*. La curva sperimentale ha una pendenza 0.96 volte il valore predetto da BKT.

Chaikin and Lubensky (2013)

Il meraviglioso grafene



Forme allotropiche del carbonio con ibridizzazione sp^2: fullerene (0D: Kroto e Smalley, 1985); nanotubi (1D); grafite (3D); grafene (2D).



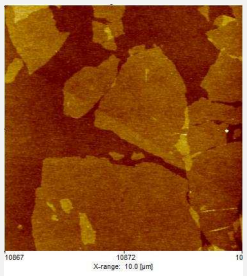
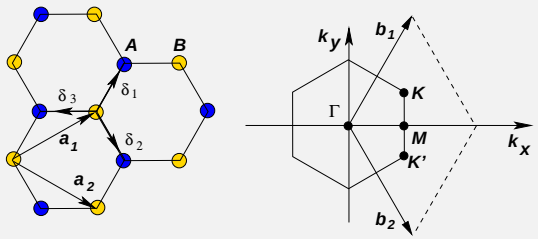


Immagine AFM (microscopia a forza atomica) di grafene su SiO_2; Immagine TEM (microscpia a trasmissione elettronica) di grafene sospeso su un ponteggio metallico.

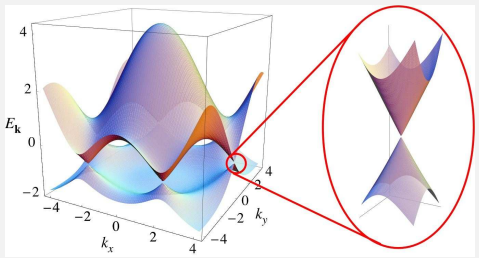
La scoperta del grafene è straordinaria in quanto esiste un teorema (Mermin e Wagner, 1968) che afferma che a basse dimensioni ($d < 3$) le fluttuazioni termiche impediscono che si sviluppi ordine a lungo raggio (ad es. ordine cristallino) a qualunque $T > 0$.

Tuttavia, nel 2004 Geim e Novoselov, strappando dello scotch posato sulla grafite, ottennero delle isole di grafene, che presentava lievi corrugazioni rispetto ad una struttura perfettamente 2D.

Bande elettroniche nel grafene



Reticolo diretto di un foglio di grafene. Prima zona di Brillouin (un esagono): Γ, M, K, K' sono punti ad alta simmetria.



Bande di valenza e di conduzione in approssimazione tight binding, con un solo parametro di hopping, t. Inset: dispersione lineare vicino K e K'.

Castro Neto *et al.* (2009)

Il reticolo a nido d'ape è bipartito, cioè costituito da due sottoreticoli triangolari (A e B). La cella primitiva contiene due atomi: A e B.

La struttura a bande nell'approssimazione più semplice possibile (tight binding) è confermata da calcoli più complessi. L'energia ε è funzione del momento (k_x, k_y) in unità di t. Nel grafene la 'superficie' di Fermi consiste di due punti inequivalenti K e K'. La dispersione lineare in prossimità di tali punti suggerisce l'importanza di effetti pseudo-relativistici (coni di Dirac).

Grafene: fermioni di Dirac-Weyl senza massa in 2D

P.A.M. Dirac introdusse la sua celebre equazione come una generalizzazione relativistica dell'equazione di Schrödinger per un elettrone in 3D. L'Hamiltoniana di Dirac di un elettrone, in funzione della dimensionalità d si può scrivere come

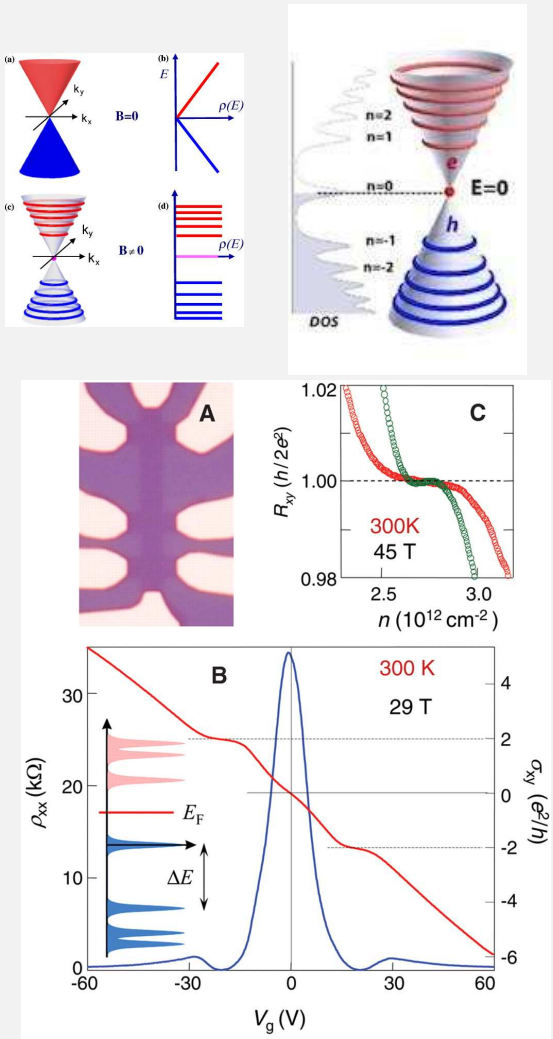
$$H_D = c \sum_{j=1}^{d} p_j \alpha_j + m_0 c^2 \alpha_0,$$

dove m_0 è la massa a riposo dell'elettrone, c la velocità della luce, e p_j sono le componenti dell'operatore impulso. Il numero e le dimensioni delle matrici α_j di Dirac dipendono dalla dimensione spaziale d.
Weyl propose un'equazione con $m_0 = 0$, mentre Majorana introdusse un'equazione per particelle senza carica (entrambe per il neutrino).
In vicinanza del livello di Fermi, nell'approssimazione tight binding con un solo parametro di hopping, per il grafene si ottiene

$$H = v_F (p_x \tau_x \sigma_x + p_y \tau_y \sigma_y),$$

dove v_F è una costante, indipendente dalla densità dei portatori, che gioca il ruolo di c. Si trova $v_F \approx c/300 \simeq 10^6$ m/s. Le matrici τ e σ sono matrici di Pauli per i 4 'gusti' (flavours) dei fermioni di Dirac-Weyl senza massa.

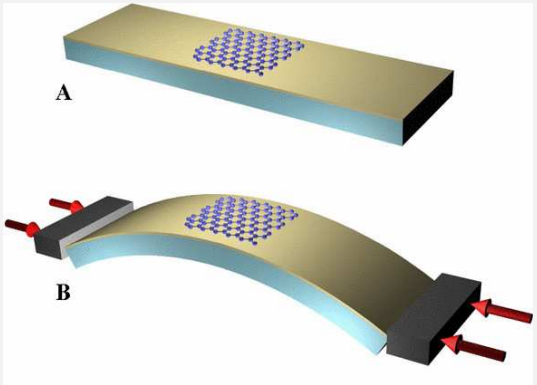
I fermioni di Dirac-Weyl in forte campo magnetico

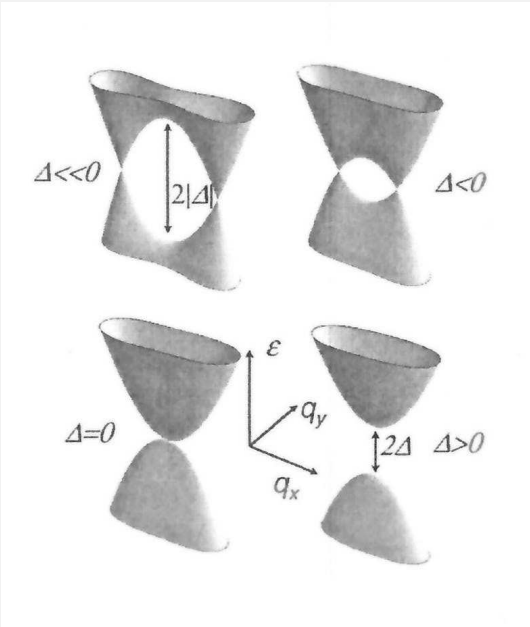


(a) Relazione di dispersione $\varepsilon = \pm v_F p$ per gli elettroni di Dirac-Weyl in campo magnetico nullo, $B = 0$.
(b) Livelli di Landau relativistici $\varepsilon_n = \pm v_F \sqrt{2\hbar e B n}$. Si noti che nel caso relativistico esiste anche lo stato ε_0, che non è presente nel caso non relativistico. Si mostra anche la densità degli stati (allargata per il disordine) corrispondente ai livelli indicati.
(c) Il Quantum Hall Effect viene osservato anche a temperatura ambiente, per la natura dei fermioni nel grafene, che si muovono con piccolo scattering anche a condizioni ambientali. Uno dei rari casi in cui gli effetti quantistici sono visibili a temperatura ambiente.

Novoselov *et al.* (2007)

Il grafene sotto sforzo uniassiale

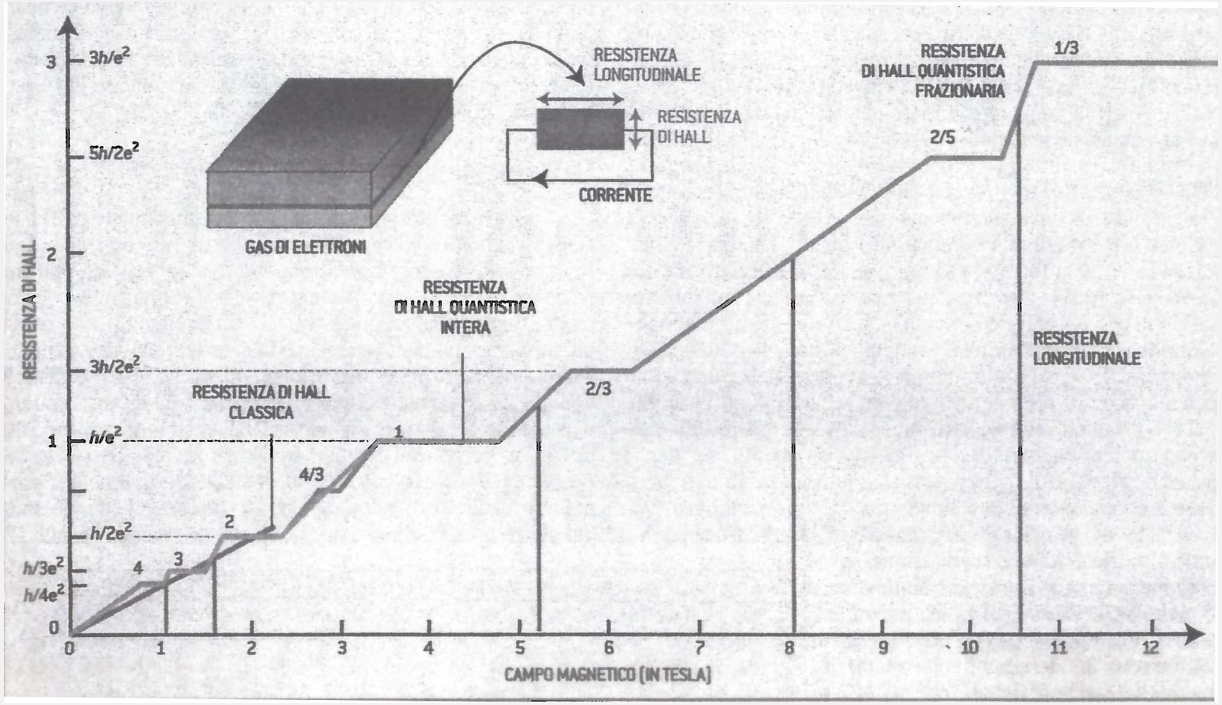




Il grafene si può sottoporre a sforzo uniassiale, ad esempio con il dispositivo in figura. Pellegrino *et al.* hanno studiato estesamente gli effetti dello *strain* sul grafene quali, ad esempio, gli effetti sulle bande elettroniche, la relazione di dispersione dei plasmoni, la conducibilità ottica, le suscettività elettrica e magnetica, il trasporto balistico.

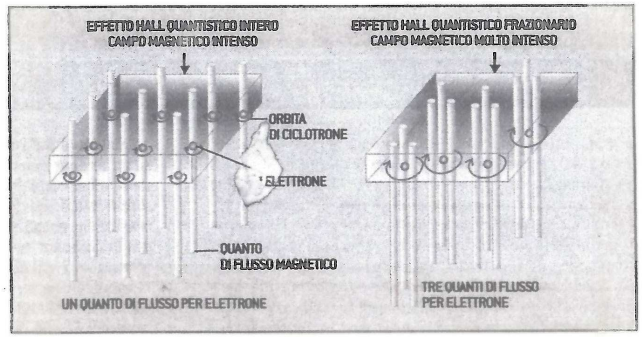
Limitandosi agli effetti dello *strain* sulla struttura a bande, il risultato più eclatante è l'apertura di una gap al livello di Fermi, cioè una transizione da semimetallo a semiconduttore. Nel modello tight-binding con due parametri di hopping (t e t') lo *strain* porta ad un'evoluzione delle relazioni di dispersione delle bande che indica che siamo vicini a tre transizioni topologiche elettroniche (ETT, Lifshitz, 1960). Queste corrispondono a cambiamenti della topologia delle linee di Fermi in funzione dello *strain*. Queste transizioni dipendono non solo dal modulo, ma anche dalla direzione dello *strain*. Una di queste è mostrata in figura, dove si osserva l'immersione uno nell'altro dei coni di Dirac. Il parametro che induce la transizione è $\Delta = t' - 2t$.

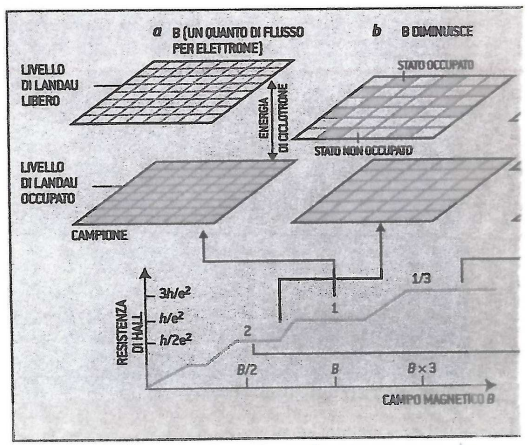
L'effetto Hall quantistico



Nell'effetto Hall classico, gli elettroni in moto in un conduttore immerso in un campo magnetico perpendicolare sono deviati dalla forza di Lorentz e si accumulano su uno dei bordi del campione. Compare una tensione perpendicolare al senso della corrente. La resistenza Hall è pari al rapporto tra questa tensione e la densità di corrente che circola nel campione. Da questa tensione si può dedurre il segno e la densità dei portatori. Nel 1980, Klaus von Klitzing ottenne un risultato strabiliante: lavorando su un gas di elettroni 2D (ottenuto ad es. all'interfaccia tra GaAs e AlGaAs, con una mobilità $\sim 10^5$ cm^2/Vs) soto 2 K e con un campo magnetico perpendicolare di 15 T, osservò che la conducibilità Hall σ_H ubbidisce alla relazione $\sigma_H = ne^2/h$, dove n è un intero, e con una precisione inferiore ad una parte su 10^9.

Le cariche frazionarie





Nel lavoro di von Klitzing, non si spiegava a che cosa fosse dovuto il fenomeno osservato. Furono Thouless *et al.* (1982) a spiegare che si era dinanzi ad una nuova fase della materia, legata agli invarianti topologici. Inoltre Tsui *et al.* scoprirono che a campi magnetici ancora più intensi si trovano nuovi plateau con n frazionario. Per dare una spiegazione intuitiva di ciò che sta avvenendo, bisogna notare che se abbiamo cariche indipendenti che si muovono in un campo magnetico, l'energia è quantizzata nei livelli di Landau $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c$, dove la frequenza di ciclotrone $\omega_c = eB/m$. Ogni livello di Landau ha una degenerazione macroscopica. Nell'effetto Hall quantistico intero, ciascun elettrone intrappola un quanto di flusso magnetico $\phi_0 = h/e$, mentre nell'effetto Hall frazionario un elettrone intrappola diversi quanti. In quest'ultimo caso Laughlin (1983) dimostrò che ci troviamo in presenza di un nuovo tipo di fluido quantistico.

Resonance Valence Bonds (RVB) for HTSC

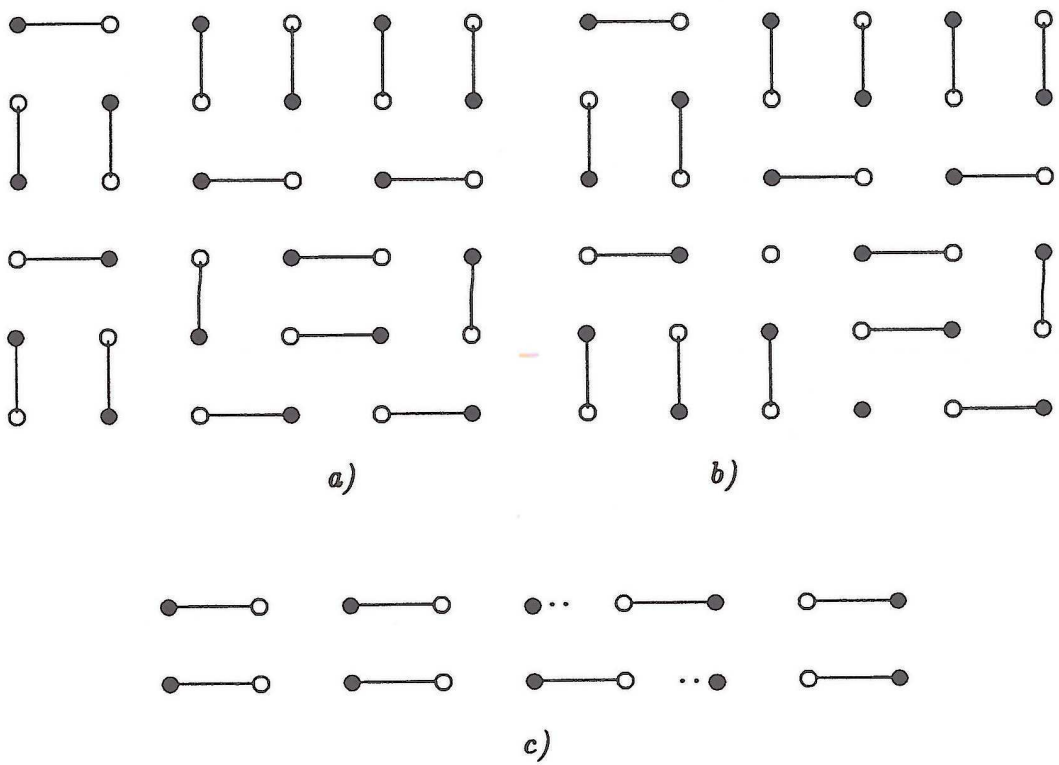


Fig. 3.1 – *a)* Una possibile configurazione di *valence bonds* tra gli *spins* associati agli elettroni 3*d* dei Cu di un *layer* CuO_2 in La_2CuO_3. *b)* Un difetto topologico in tale reticolo di *valence bonds* è uno *spinone*. *c)* Tali *spinoni* possono 'muoversi' risonando con gli *spins* di un *valence bond* adiacente, come è mostrato in un semplice caso unidimensionale.

Anderson (1997)

Electronic Topological Transition (ETT)

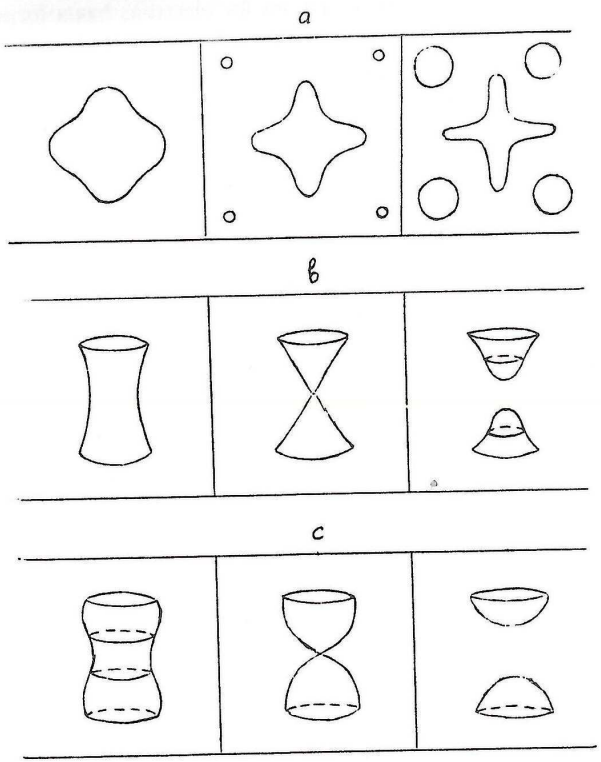


Fig. 11. The change in the Fermi surface connectivity upon $2\frac{1}{2}$-order phase transition: formation of a new void(a); neck disruption accompanied by the emeregence of lines of O-type points (b) or the dissapearance of X-type points (c) (the lines of parabolic points are indicated).

Lifshitz (1960)

Ancora sulla transizione BKT

L'energia di formazione E_v di un vortice è data da

$$E_v = \pi J \ln \frac{L}{a}$$

dove L è la dimensione del sistema ed a è un cut-off di corta distanza, delle dimensioni del core del vortice. Per un sistema grande, il costo d'energia è molto elevato, e quindi non può essere eccitato da fluttuazioni termiche: E_v diverge come $\ln L$.
Ciò non sussiste per le coppie vortice-anticortice, poiché esse hanno vorticità totale nulla. L'energia E_c richiesta per creare una coppia è

$$E_c = 2\pi J \ln \frac{r}{a}$$

dove r è la separazione tra i due vortici.

Topologia e invarianti

La topologia è quella branca della matematica che studia le figure e la disposizione di esse nello spazio.
I vortici, ad esempio, hanno una proprietà nota come numero di avvitamento (winding number), che descrive quante volte essi 'girano' attorno ad un punto centrale. I numeri di avvitamento sono degli invarianti topologici. Essi cioè non cambiano quando cambia la forma. La somma totale dei numeri di avvitamento dei vortici che compaiono e scompaiono, quando si applica un campo magnetico alla ciambella, resta lo stesso. La ciambella è la forma che assumono gli orbitali nei livelli di Landau. La somma descritta si chiama numero di Chern (1940).

Un modo conveniente per etichettare gli stati degeneri di Landau è, ad esempio, l'uso del momento cristallino. Il gruppo rilevante è quello delle traslazioni magnetiche finite, che formano un reticolo nel quale c'è un'unità di flusso magnetico per ogni cella del reticolo. Possiamo etichettare le autofunzioni in una banda, qui il livello di Landau, con un vettore d'onda $\mathbf{k}$ nel reticolo reciproco. Indichiamo con $u_{\mathbf{R},n}(\mathbf{r})$ la funzione d'onda nell'n-simo livello di Landau. Si può ricavare un'espressione per la conducibilità

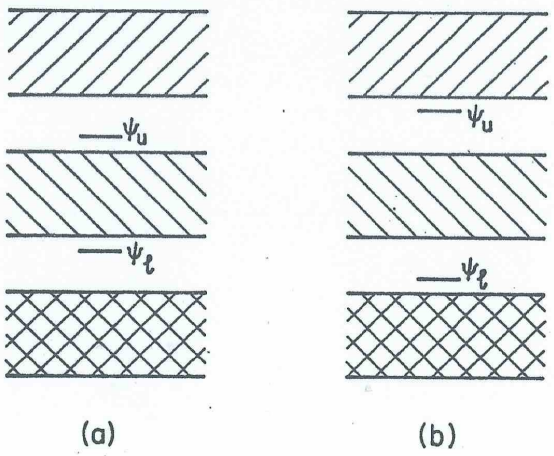
$$\sigma_H = \frac{e^2}{2\pi h} \sum_n \int_{\mathbf{k}\in 1\mathrm{BZ}} d^2\mathbf{k}\, \mathcal{B}(\mathbf{k}, n),$$

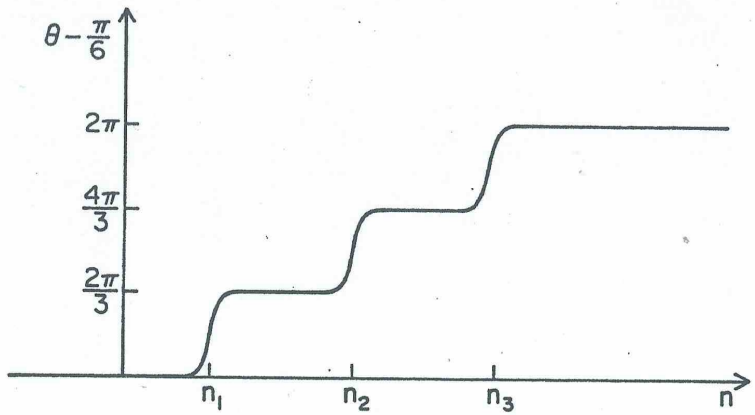
dove $\mathcal{B}(\mathbf{k}, n)$ è l'intensità del campo di Berry. Si può dimostrare che

$$\frac{1}{2\pi} \int_{1\mathrm{BZ}} d^2\mathbf{k}\, \mathcal{B}(\mathbf{k}, n) = \mathcal{C}_1(n)$$

dove il numero di Chern $\mathcal{C}_1(n)$ è un intero, ed è un invariante topologico.

Solitoni





- I solitoni possono avere cariche frazionarie
- TTF-TCNQ a $p = 18$ kbar

Su e Schrieffer (1981)

Kivelson e Schrieffer (1982)