Accademia Gioenia di Catania
Mercoledì 18 Gennaio 2023 ore 17

Caffè scientifico sul tema: Quattro infiniti in matematica: o uno solo?

Introduce i lavori: Luigi Fortuna (Presidente Accademia Gioenia)

Coordina: Giovanna Giardina (Disum, Università di Catania)

Interventi
M. Panza (Research director CNRS and Chapman University, Orange, California, USA)
Quattro infiniti in matematica: o uno solo? Calcolo infinitesimale e teoria degli insiemi
D. Struppa (Chapman University Orange, California, USA)
Quattro infiniti in matematica: o uno solo? Lo spazio proiettivo e la teoria della misura

Discussione

ABSTRACT

Divideremo la nostra presentazione in quattro parti in cui analizziamo diversi modi in cui I matematici hanno cercato di creare strutture per addomesticare l'idea di infinito: lo spazio proiettivo (presentato da Daniele Struppa), il calcolo infinitesimale (presentato da Marco Panza), la teoria degli insiemi (presentata da Marco Panza) e la teoria della misura (presentata da Daniele Struppa). Naturalmente la nostra presentazione non si limiterà a un rapido riassunto di queste quattro teorie, ma piuttosto nel cercare di rispondere alla domanda di quale sia il ruolo che l'infinito, inteso come infinito attuale, gioca in matematica. Ognuna delle quattro parti offrirà quindi una breve descrizione (anche storica) delle sue idee fondamentali, ma anche e soprattutto un'analisi del ruolo dell'infinito.

La ragione per cui ci limitiamo all'infinito attuale, ovvero al ruolo di entità concepite esse stesse come infinite, è che l'infinito potenziale, concepito come assenza di limiti in un processo operativo, o meglio come l'ammissione della possibilità di operare senza limiti stabiliti, è pervasivo in matematica, al punto che studiarne il ruolo equivale a studiare la natura stessa del pensare matematicamente, ciò che non può essere ovviamente oggetto della nostra presentazione.

Lo scopo principale dell'infinito nello spazio proiettivo è quello di creare uno spazio che permetta di rappresentare quello che il pittore vede. Dunque l'infinito offre una compattificazione della retta, del piano e dello spazio, che si ottiene aggiungendo nuovi oggetti: i punti, le rette, e i piani all'infinito. È quindi certamente una forma di infinito attuale, che può essere studiato attraverso un sistema di nuove coordinate, in cui gli oggetti all'infinito sono del tutto equivalenti, ed indistinguibili, da quelli usuali.

Nel calcolo infinitesimale l'infinito e l'infinitamente piccolo svolgono dapprima un ruolo euristico, dando ruolo a metafore che guidano la scoperta di regole formali che sopravvivano intatte all'eliminazione delle entità infinite(simali), grazie, da una parte all'attenzione verso fenomeni puntuali, e dall'altra a delle appropriate relazioni funzionali. Le stesse regole possono essere ritrovate attraverso un uso rigorosamente controllato di tali entità, nel quadro dell'analisi cosiddetta non standard.

Nella teoria degli insiemi, l'infinito attuale appare in quanto contesto prestabilito entro il quale ricondurre le teorie matematiche esistenti. L' assioma dell'infinito asserisce l'esistenza di un insieme entro il quale si possa fare aritmetica, e, insieme all'assioma dell'insieme potenza, apre la strada a un processo iterativo in cui ogni stadio è tanto infinito quanto generato da, e generatore di altri infiniti. L'assioma della scelta interviene per permettere di controllare appropriatamente il processo di generazione, in modo da ottenere costrutti particolari in cui ritrovare teorie già note e produrne di nuove.

Molte delle idee discusse nelle due parti precedenti culminano nella teoria che cerca di definire in maniera precisa la nozione di 'misura' di un sottoinsieme della retta, del piano, o dello spazio. Mentre il concetto di misura sembra essere naturale e intuitivo, mostreremo come sia essenzialmente impossibile definire una nozione di misura che rispetti tutte le condizioni che si vorrebbero associare ad essa. Il problema non nasce solamente quando si scompongono insiemi in un numero infinito di sottoinsiemi ma, paradossalmente, anche con scomposizioni finite, anche se la natura di tale (detto di Banach-Tarski) affonda di nuovo le sue radici nel concetto di infinito.