Quattro infiniti in matematica: o uno solo?

Marco Panza, Universite' Paris 1, Sorbonne; and Department of Philosophy, Chapman University

Daniele C. Struppa, Donald Bren Presidential Chair in Mathematics and President, Chapman University

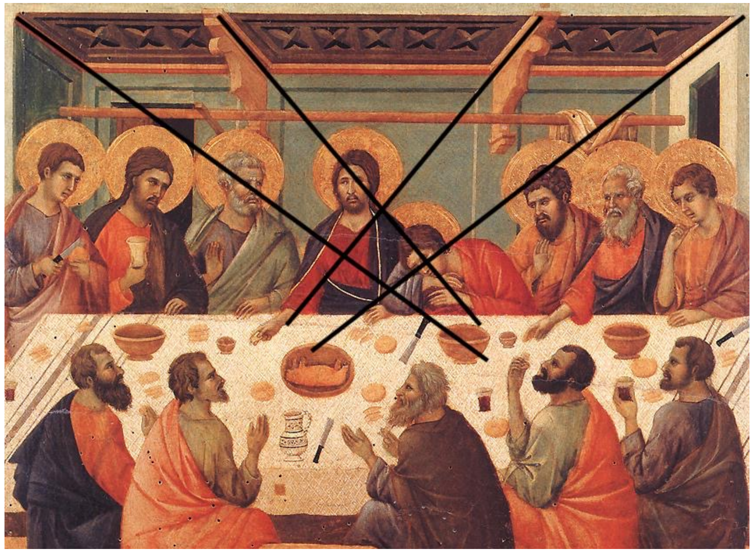
CHAPMAN UNIVERSITY

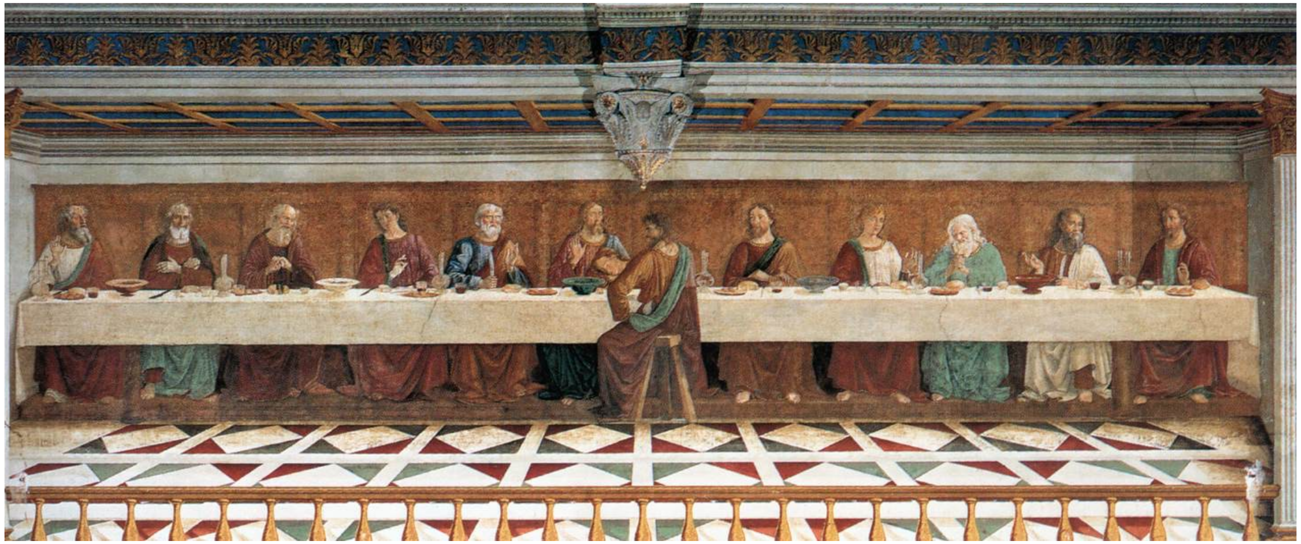
Una conferenza in quattro parti

- L’infinito dei pittori: geometria proiettiva e prospettiva
- Il calcolo infinitesimale
- Teoria degli insiemi
- Teoria della misura

Parte I

L’infinito dei pittori:
geometria proiettiva e prospettiva





L’evoluzione della prospettiva in tre immagini

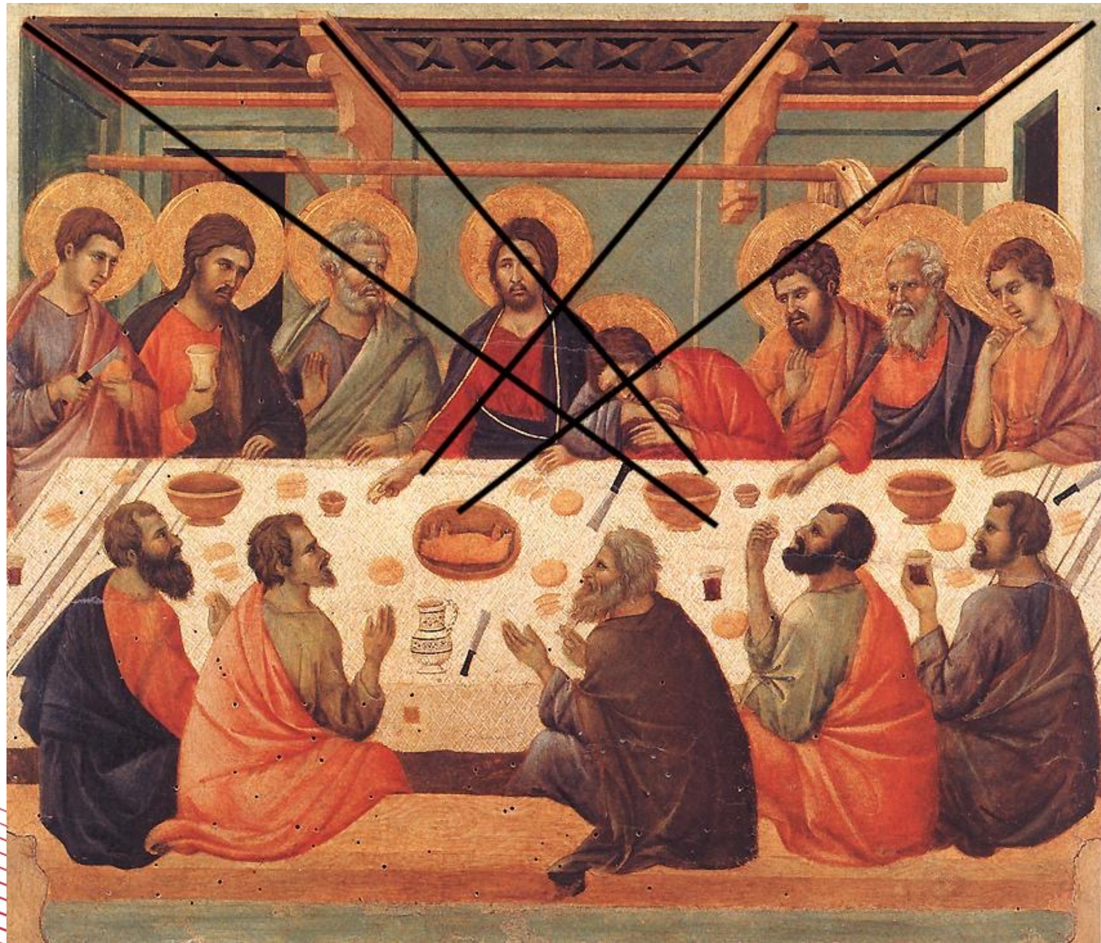
Quale e’ il problema? Quale la sfida?

- La geometria che descrive gli oggetti come **sono**, non e’ la stessa geometria che descrive gli oggetti come **appaiono**.
- I rettangoli hanno i lati perpendicolari e paralleli, ma quando li guardiamo queste proprieta’ non sono piu’ vere.
- Come possiamo fare a capire in che modo rappresentare gli oggetti cosi’ che **appaiano** come **sono**…come ingannare il cervello e gli occhi di chi guarda in maniera che creda di vedere veramente un rettangolo, anche se noi gli disegnamo qualche cosa di diverso?
- In che modo questo problema e’ collegato al concetto di infinito?

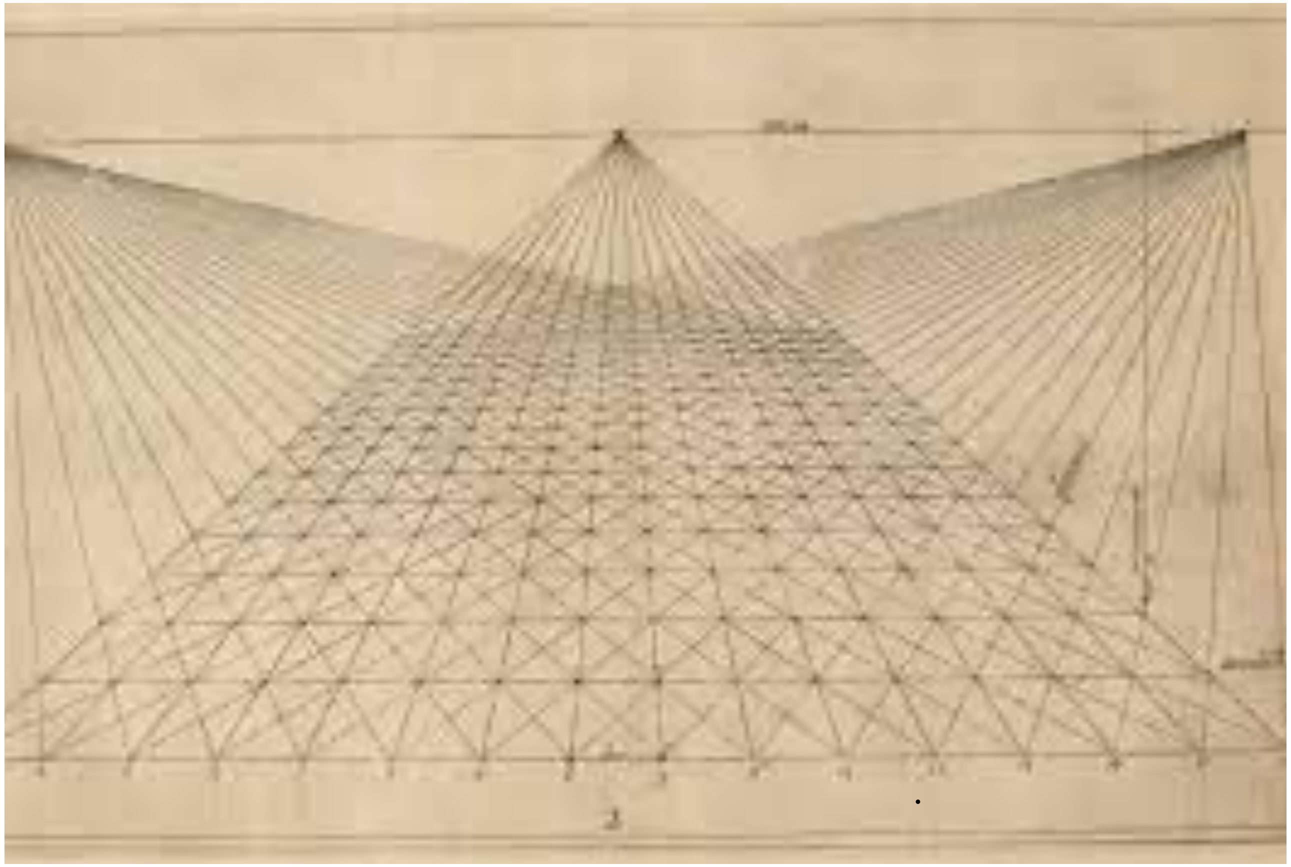
CHAPMAN UNIVERSITY

LIBRO DE LOS JUEGOS, PROBLEMA #35, CIRCA 1200

DUCCIO DI BONINSEGNA, MAESTA' (SIENA, 1308-11)



DOMENICO GHIRLANDAIO, 1476



Un nuovo spazio: punti, rette, piani all’infinito.

Fra Angelico, Cortona 1433-34

Il pagamento del Tributo, Masaccio 1420

Due spazi che si corrispondono

Il dipinto

- Il punto di fuga e' un punto vero
- L'orizzonte e' una retta vera
- Le aureole sono coniche

La realta'

- Il punto di fuga esiste solo all'infinito
- L'orizzonte esiste solo all'infinito
- Le aureole sono cerchi

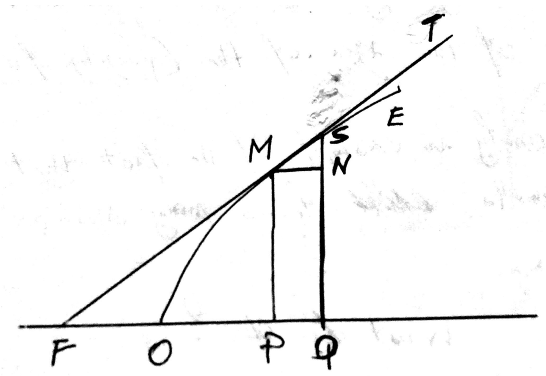
CHAPMAN UNIVERSITY

Parte II

Il calcolo infinitesimale

Leibniz sulle tangenti

Il calcolo infinitesimale prende il suo nome dall'uso proposto da Leibniz (e altri) di infinitasimali per risolvere il problema delle tangenti.



Se l'incremento PQ = *dx* é infinitamente piccolo, S può essere preso come appartenente tanto alla curva che alla tangente, e quest'ultima può quindi essere determinata trovando il punto F grazie alla proporzione:

$$FP : PM :: MN : NS$$

$$stg_x : y :: dx : dy$$

A questo scopo, Leibnz si avvale del cosidetto principio di omissione degli infinitesimi di ordine superiore. Per esempio:

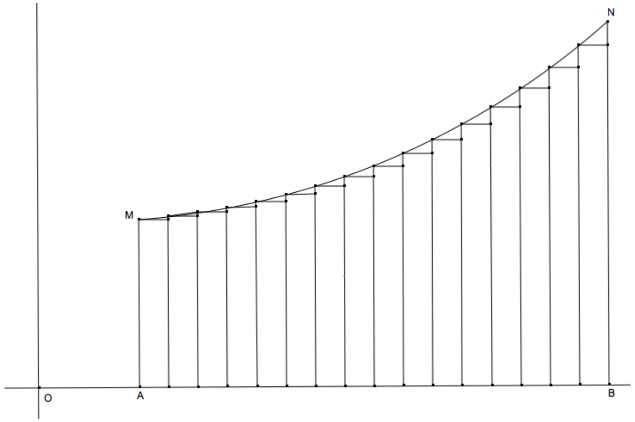
$$\text{Se } y = x^n \text{ allora } dy = (x+dx)^n - x^n = nx^{n-1}dx \quad ; \quad dy/dx = nx^{n-1}$$

e quindi

$$stg_x = x^n dx / nx^{n-1}dx = x/n$$

Leibniz sulle aree

Un approccio simile si applica anche al problema delle aree.



Se l'incremento *dx* è infinitamente piccolo, allora il trapezoide BANM può essere preso come uguale alla figura a scala sottostante, e quindi:

$$\text{Area(BANM)} = y_x dx + y_{x+dx} dx + y_{x+2dx} dx + \ldots + y_{x+\infty dx} dx$$
$$= (y_x + y_{x+dx} + y_{x+2dx} + \ldots + y_{x+\infty dx})dx$$

che Leibniz scrive succintamente come

$$\text{Area(BANM)} = \int y dx$$

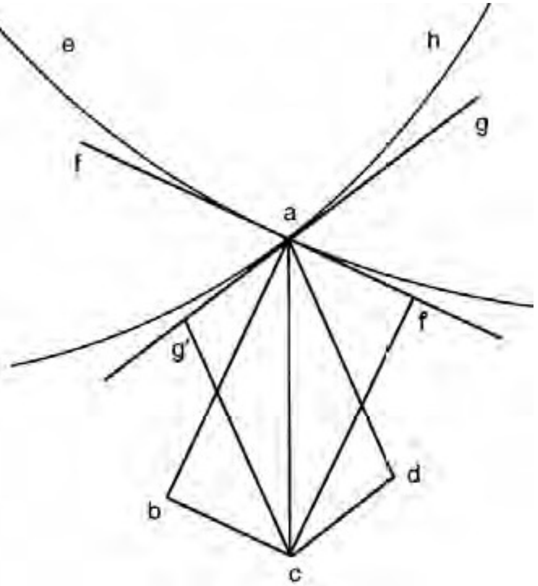
Qui '∫' sta per 'S' come 'Somma', e Leibniz si richiama al fatto che somnma e differenza sono operazioni inverse per giustificare il fatto che le aree si calcolano applicando a *ydx* l'algoritmo inverso a quello usato per calcolare la (sotto-)tangenxte.

Newton sulle tangenti

L’approccio di Leibniz è intrinsecamente infinitesimalista: Il calcolo di aree e tangenti si riduce a un calcolo di differenze infinitesime e di somme infinite. L’apprccio di Nexton è del tutto diverso. Per lui il problema di aree e tangenti si riduce a un problema di velocità istantanee (o puntuali).

Una curva e’ pensata come la traiettoria del punto di intersezione di due altre curve che si muovono su un piano fisso.

Se si conoscono le tangenti di una curva nel luogo punto di intersezione e le velocita’ puntuali dei loro movimenti, una semplice costruzione geometrica fornisce la tangente della traiettoria di questo punto.



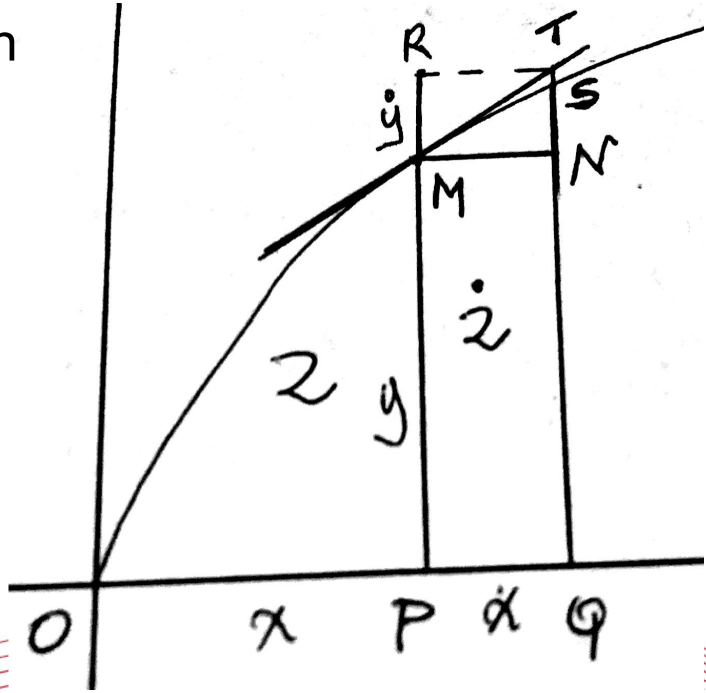
Gli infinitamente piccoli entrano in gioco per calcolare le velocita’ puntuali, ma sono uno strumento, non l’oggetto del calcolo.

Newton sulle aree

La reciprocita' dei problemi delle aree e delle tangenti e' mostrata in modo semplicissimo.

Sia *z* l'area della curva di ordinata *y*. La sua velocita' puntuale di accrescimento sara' vel(*z*) = *y*·vel(*x*), con vel(*x*) la velocita' della ascissa.

Cosi' per ottenere *z* basta applicare a *y*·vel(*x*) l'algoritmo inverso a quello che serve a trovare la velocita' istantanea e le tangenti.



Il metodo $\varepsilon-\delta$

- Sappiamo oggi come giustificare gli algoritmi equivalenti di Leibniz e Newton in termini di funzioni derivate e limiti senza usare infinitesimali.

- L'importante qui e' solo osservare che la funzione derivata di *y=f(x)* e' *f'(x)* che puo' essere algoritmicamente equiparata al rapport (finito) *dy/dx*.

Analisi non-standard

- Oggi sappiamo anche come reintrodurre gli infinitesimali di Leibniz in modo rigoroso in modo da ritrovare I suoi metodi.
- Si tratta della cosiddetta analisi non-standard, che sappiamo presentare in almeno due modi distinti.
- Come applicazione della teoria dei modelli, nata dalla teoria degli insiemi, e dai teoremi limitativi che si applicano a questa.
- In termini puramente assiomatici, aggiungendo un predicato e pochi assiomi alla teoria assiomatica di un campo ordinato, abeliano, e completo.

Parte III

Teoria degli insiemi

Un esempio, una domanda, due risposte

- L’insieme N dei numeri naturali {0,1,2,3,…} e’ un insieme infinito.
- L’insieme P dei numeri pari {0,2,4,6,8,…} e’ pure un insieme infinito.
- Quale e’ il piu’ grande?
- Risposta 1. Chiaramente N e’ piu’ grande perche’ contiene propriamente P
- Risposta 2. Chiaramente sono grandi uguali perche’ possiamo metterli in una corrispondenza biunivoca che associa a ogni elemento di N un elemento di P (a ogni elemento il suo doppio).

Cosa vuol dire che un insieme e' infinito?

- Definizione 1. Un insieme S e' finito quando ne posso contare gli elementi (piu' propriamente, quando esiste un numero n in modo che ci sia una corrispondenza biunivoca fra gli elementi di S e l'insieme {1,2,…,n}
- Definizione 2. Un insieme S e' infinito quando non e' finito.
- Definizione 3. Un insieme S e' infinito quando si puo' mettere in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio (come N ed P).
- Domanda: Le definizioni 2 e 3 sono equivalenti?

Sono tutti gli insiemi infiniti grandi uguali?

- Gli alberghi di Russel: alberghi con infinite stanze, numerate con 1, 2, 3,…
- Se un albergo e' pieno, posso aggiungere un ospite?
- Se ho due alberghi di Russel, posso mettere tutti gli ospiti insieme in un solo albergo?
- Se ho infiniti alberghi di Russel (albergo 1, albergo 2, …), posso mettere tutti gli ospiti in un solo albergo?
- Ma allora, sono tutti gli infiniti grandi uguali?

CHAPMAN UNIVERSITY

Cantor, e i numeri reali

- P, N, Q, sono tutti grandi uguali.
- Che cosa succede se prendo R?
- Il metodo diagonale.
- Ci fermiamo qui o ci sono infiniti ancora piu' grandi?

L’equivalenza delle definizioni di infinito, parte I

- Ritorniamo alle due definizioni di infinito.
- 1. Un insieme e’ infinito se non si puo’ mettere in corrispondenza con {1,2,…,n} per nessun n.
- 2. Un insieme e’ infinito se si puo’ mettere in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio
- Teorema: Se un insieme e’ infinito nel senso della definizione 2, lo e’ anche nel senso della definizione 1.
- Dimostrazione: Infatti se S si potesse mettere in corrispondenza con qualche {1,2,…,n} allora sarebbe impossibile metterlo in corrispondenza con un sottoinsieme proprio.

L'equivalenza delle definizioni di infinito, parte II

- Teorema: Se un insieme S e' infinito nel senso della definizione 1, lo e' anche nel senso della definizione 2.
- Dimostrazione: Prendiamo un elemento s_1 di S. Sicuramente questo non esaurisce S (per la definizione 1). Prendiamo ora un element s_2 di $S\setminus\{s_1\}$. Di nuovo questo non esaurisce S. Posso continuare all'infinito e costruire cosi' un sottoinsieme $\{s_1,s_2,\ldots\}$ di S che e' numerabile e quindi in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme di se stesso.
- Domanda: perche' questa seconda dimostrazione e' concettualmente molto piu' complessa della prima?

La necessita’ di assiomi per una teoria degli insiemi

- Scopo della teoria: fornire un *framework* all’interno del quale si possa ricuperare una grande parte della matematica.
- E’ sufficiente identificare un insieme con la totalita’ degli elementi che soddisfano una certa proprieta’?
- Il paradosso di Russel mostra che cio’ non e’ possibile e questo rende necessaria una teoria assiomatica degli insiemi.
- La piu’ comune e’ ZFC, di cui illustreremo tre assiomi.

Tre assiomi di ZFC

- Estensione: X=Y se e solo se ogni element di X e' anche un element di Y e viceversa.
- Infinito: Esiste un insieme infinito. In particolare esiste un insieme che contiene l'insieme vuoto Ø, l'insieme {Ø}, l'insieme {Ø,{Ø}}, etc.
- Scelta: Dati infiniti insiemi non vuoti, e' sempre possibile costruire un insieme che contiene uno e un solo element per ognuno di questi insiemi (e questo anche quando non si disponga di una funzione di scelta esplicita).

A che servono questi assiomi?

- Estensione: contribuisce a eliminare paradossi tipo Russel.
- Infinito: a permettere la costruzione di un infinito attuale entro il quale e' possibile costruire ogni infinita' potenziale di insiemi.
- Scelta: permette la dimostrazione di numerosi risultati (alcuni stupefacenti) e la costruzione di oggetti importanti. Un esempio e' proprio l'equivalenza delle due nozioni di infinito.

Parte IV

Teoria della misura

Cosa vuol dire ‘misurare’?

- Una lunghezza
- Un’area
- Un volume
- Quali proprieta’ ci aspettiamo da una ‘misura’?
- Tradizionalmente assumiamo che ogni solido E ammetta dunque una misura, il suo volume, m(E).

Proprieta' 'ovvie'

- Non-negativita': $m(E) \geq 0$
- Misura del nulla: $m(\emptyset)=0$
- Additivita' (finita, numerabile, o continua?): if A e B sono insiemi disgiunti, allora $m(A \cup B)=m(A)+m(B)$
- Invarianza per traslazione

Problemi immediati

- Ogni solido e' fatto da infiniti punti. Ogni punto ha misura (volume) zero, ma il solido ha misura (volume) diverso da zero…
- m([0,1])=1; m([0,2])=2, ma [0,1] e [0,2] hanno lo stesso numero di punti (come ha spiegato Marco)…quindi e' possibile prendere un insieme, scomporlo in un numero infinito (anche non-numerabile) di sottoinsiemi, e ricomporre questi sottoinsiemi per creare un nuovo insieme di misura doppia a quella iniziale!

CHAPMAN UNIVERSITY

Il paradosso di Banach-Tarski

- E’ possibile prendere la sfera unitaria nello spazio usuale, dividerla in cinque pezzi (non in un numero infinito, ma in un numero finito e piccolissimo), e poi rimettere insieme questi pezzi (dopo averli al massimo ruotati e traslati) ottenendo in questo modo due sfere unitarie solide.

- Usando questa idea si puo’ dimostrare che si puo’ prendere un pisello, spezzarlo in un numero finito di pezzetti, ricomporli, ed ottenere una sfera grande come il sole!

Cosa ci dicono i paradossi?

- Che qualche cosa che abbiamo preso per buona, in realta' non puo' essere vera.
- In questo caso ci sono due possibilita'.
- Possibilita' 1. Scartare l'assioma di scelta di cui Marco ha parlato.
- Possibilita' 2. Accettare che esistano insiemi per i quali non si possa parlare di misura.
- Entrambe possibilita' spiacevoli. I matematici hanno scelto la seconda.

CHAPMAN UNIVERSITY

Tre misure

- Misura elementare: segmenti, rettangoli, parallelepipedi, e loro unioni finite disgiunte (insiemi elementari)
- Misura di Jordan: Si segue l'idea di Archimede…prendendo misure interne ed esterne di insiemi elementari. Alcuni insiemi (per esempio [0,1]\Q) non sono misurabili. Strettamente collegato al concetto di integrabilita' discusso nella seconda parte
- Misura di Lebesgue: Si estende il concetto di Jordan, ma con unioni infinite disgiunte. Permette la misurabilita' di [0,1]\Q. Usando AC si possono ottenere insiemi non misurabili

Conclusioni

CHAPMAN
UNIVERSITY

CHAPMAN
UNIVERSITY