Invited lecture	Bollettino Accademia Gioenia Sci. Nat.	Vol. 45	N.° 374	pp. 1 - 7	Catania 2012	ISSN 0393 - 7143

Curve nello spazio proiettivo

ROSARIO STRANO*

Dipartimento di Matematica ed Informatica,
Università di Catania, viale A. Doria, 6 - 95125 Catania
e-mail: sstrano@dmi.unict.it

RIASSUNTO

In questa breve nota, di carattere espositivo, richiamiamo alcune nozioni e problematiche di base relative alla teoria delle curve in P_C^3. In particolare, dopo aver richiamato le nozioni di curva *Intersezione completa* (*C.I.* in breve) e di curva *Intersezione completa insiemistica* (*I.C.I.* in breve), citiamo alcuni risultati a queste collegati. Ci soffermeremo soprattutto sulla questione, ancora irrisolta, se una curva irriducibile di P_C^3 sia *I.C.I.*. A tale proposito riportiamo due importanti teoremi relativi al numero minimo di equazioni che definiscono insiemisticamente una curva C: il teorema di Kronecker e il teorema di Kneser.

Parole chiave. Spazio proiettivo, insiemi algebrici chiusi, curve proiettive, polinomi omogenei, ideali.

SUMMARY

Curves in projective spaces

In this short note, of expository character, we recall same basic facts and problems related to curves in P_C^3. In particular we recall the notions of curve *Complete Intersection* (*C.I.* for short) and of curve *Set theoretical complete intersection* (*I.C.I.* for short) and we cite some related results. We mostly focus on the question, still unsolved, whether every irreducible curve in P_C^3. is *I.C.I.*. To this end we report two important theorems regarding the least number of equations that define a curve set-theoretically: the theorem of Kronecker and the theorem of Kneser.

Key words. Projective space, algebraic closed subsets, projective curves, homogeneous polynomials, ideals.

* Nota presentata dal Socio Rosario Strano nella seduta del 4-11-2011

1. Generalità sugli spazi proiettivi. Richiamiamo sommariamente alcune definizioni di base relative agli spazi proiettivi.

Sia $\mathbb{C}$ il campo dei numeri complessi. Lo *Spazio proiettivo complesso n-dimensionale* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ è l'insieme dei sottospazi 1-dimensionali dello spazio vettoriale $\mathbb{C}^{n+1}$. Un sottospazio 1-dimensionale $P \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$, che sarà chiamato *punto* di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, è individuato da una $n+1$-upla $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ di P; tale rappresentazione è unica a meno di un fattore di proporzionalità non nullo; gli elementi della $n+1$-upla $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ sono detti *coordinate omogenee* di P.

Si dice *Insieme algebrico chiuso* Z di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, l'insieme costituito dai punti P di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ che con le loro coordinate soddisfano un sistema di equazioni del tipo:

$$\begin{cases} f_1 = & 0 \\ f_2 = & 0 \\ \vdots & \\ f_m = & 0 \end{cases}$$

dove $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sono polinomi omogenei (forme) nelle indeterminate $x_0, x_1, \ldots, x_n$ a coefficienti in $\mathbb{C}$. Ad ogni insieme algebrico chiuso Z di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ possiamo associare un *ideale omogeneo* $I(Z) \subseteq \mathbb{C}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ costituito da tutte le forme che si annullano su Z.

Un insieme algebrico chiuso Z si dice *irriducibile* se non si può esprimere come unione $Z = Z_1 \cup Z_2$ di due altri insiemi algebrici chiusi Z_1 e Z_2 propriamente contenuti in Z. Se Z è un insieme algebrico chiuso irriducubile e non vuoto si definisce *dimensione* di Z, e si indica con $\mathrm{Dim}(Z)$, la massima lunghezza r di una catena di insiemi algebrici chiusi irriducibili e non vuoti $Z = Z_0 \supset Z_1 \supset Z_2 \supset \ldots \supset Z_r$; l' insieme vuoto ha, per convenzione, dimensione -1.

2. Curve in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$. D'ora in poi ci restringeremo al caso dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, brevemente indicato con $\mathbb{P}^3$. Gli insiemi algebrici irriducibili di dimensione zero sono i *punti.* Gli insiemi algebrici irriducibili di dimensione due sono le *superficie* irriducibili, costituite dai punti che con le loro coordinate omogenee annullano un polinomio omogeneo irriducibile $f \in \mathbb{C}[x, y, z, t]$; il grado del polinomio f dicesi l'ordine della superficie. Le superficie di ordine uno sono i piani, quelle di ordine due le quadriche, di ordine tre le superficie cubiche e così via.

Noi ci occuperemo degli insiemi algebrici chiusi irriducibili di dimensione 1, cioè delle *curve* irriducibili di $\mathbb{P}^3$. Ogni curva C possiede un *grado* d che è il numero di punti comuni a C e a un generico piano dello spazio. Esaminiamo alcuni esempi di curve per i primi valori di d:
per $d = 1$ otteniamo una retta, intersezione di due piani;
per $d = 2$ otteniamo una conica, intersezione di un piano e una quadrica;

per $d = 3$ oltre alle cubiche piane abbiamo le cubiche gobbe; un esempio di cubica gobba è l'insieme dei punti di coordinate $(\alpha, \alpha^2, \alpha^3, 1)$ con l'aggiunta del punto (all'infinito) $(0, 0, 1, 0)$;
per $d = 4$ abbiamo due tipi di quartiche gobbe:
a) le quartiche razionali; per esempio l'insieme dei punti di coordinate $(\alpha, \alpha^3, \alpha^4, 1)$ con l'aggiunta del punto (all'infinito) $(0, 0, 1, 0)$;
b) le quartiche ellittiche che sono intersezione di due quadriche.

3. L'intero $\nu(C)$. Data una curva C nasce spontanea la seguente questione: *quante equazioni servono per definire C ?* Così posta la questione è ambigua e può dar luogo, come è successo in passato (vedi per esempio la polemica tra Perron e Severi negli anni 40 del secolo scorso), a vari equivoci. La questione posta si può precisare in più modi differenti. In questo paragrafo ci occupiamo di una di tali nozioni mentre un'altra sarà data nel paragrafo successivo.
Data una curva C definiamo un intero $\nu(C)$ come segue: *$\nu(C)$ è il più piccolo intero positivo m per cui esistono m forme $f_1, f_2, \ldots, f_m$ che si annullano su C e tali che ogni altra forma f che si annulla su C si può scrivere come* $f = f_1 g_1 + f_2 g_2 + \ldots + f_m g_m$; in altre parole $\nu(C)$ è il minimo numero di generatori dell'ideale omogeneo $I(C)$ nell'anello di polinomi $\mathbb{C}[x, y, z, t]$.
Si ha $\nu(C) \geq 2$ per ogni curva C di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ mentre, d'altro canto, $\nu(C)$ può essere arbitrariamente grande. Quando $\nu(C) = 2$ la curva C si dice una *Completa Intersezione* (brevemente *C.I.*). Gli esempi di curve sopra riportati sono tutti *C.I.* tranne:
a) la cubica razionale per la quale è $\nu(C) = 3$ e l'ideale $I(C)$ è generato dalle tre quadriche:

$$xz - y^2, yt - x^2, xy - zt$$

b) la quartica razionale per la quale è $\nu(C) = 4$ e l'ideale $I(C)$ è generato dalle forme:

$$xy - zt, y^3 - z^2x, x^3 - t^2y, x^2z - y^2t.$$

A proposito delle curve *C.I.* voglio citare una questione da me affrontata alcuni anni fa. Osserviamo che se una curva C è *C.I.* di due superficie S e S', allora se sechiamo C con un piano generico H dello spazio otteniamo un insieme di punti Γ che è *C.I.* delle due curve $S \cap H$ e $S' \cap H$ del piano H.
Ci chiediamo se valga il viceversa. La risposta è ovviamente negativa come mostra l'esempio della quartica razionale che non è *C.I.*, ma la sua generica sezione piana è costituita da un insieme Γ di 4 punti che sono *C.I.* di due coniche del piano H; più in generale possiamo considerare una curva C di grado pari $d = 2r$ su una quadrica Q: la sua generica sezione piana è costituita da $2r$ punti che sono *C.I.* della conica $Q \cap H$ e di una curva di grado r del piano H, ma C non è necessariamente *C.I.*.
Nel lavoro [1] viene provato che le curve descritte sopre sono le uniche eccezioni; precisamente viene provato il seguente teorema:

Teorema 1. *Sia C una curva di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$* ***non*** *contenuta in una quadrica e supponiamo che la sua generica sezione piana $C \cap H = \Gamma$ sia intersezione completa di due curve del piano H. Allora C è C.I..*

3. L'intero $\mu(C)$. Definiamo adesso un altro intero legato ad una curva C come segue: *$\mu(C)$ è il più piccolo intero positivo m per cui esistono m forme $f_1, f_2, \ldots, f_m$ che si annullano su C e tali che un punto P di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ sta in C se e solo se con le sue coordinate soddisfa al sistema*

$$\begin{cases} f_1 = & 0 \\ f_2 = & 0 \\ \vdots & \\ f_m = & 0 \end{cases}$$

In termini algebrici $\mu(C)$ è il minimo numero di elementi nell'anello di polinomi $\mathbb{C}[x, y, z, t]$ che generano un ideale J tale che $\sqrt{J} = I(C)$.
È chiaramente $2 \leq \mu(C) \leq \nu(C)$; se $\mu(C) = 2$ allora C è detta *Intersezione completa insiemistica* (*I.C.I.* in breve). Chiaramente se C è *C.I.* allora è anche *I.C.I.* ma non vale il viceversa come mostra l'esempio della cubica razionale che non è *C.I.* ma è *I.C.I.*: infatti i suoi punti sono tutti e soli quelli che soddisfani al sistema:

$$\begin{cases} xz - y^2 & = 0 \\ x^3 + zt^2 - 2xyt & = 0 \end{cases}$$

La determinazione di $\mu(C)$ ha una lunga e travagliata storia che illustreremo nei prossimi paragrafi.

4. Il teorema di Kronecker. Nel 1881 Leopold Kronecker (1823-1891), usando difficili tecniche di teoria dell'eliminazione provò che $\mu(C) \leq 4$ per ogni curva C di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$; più in generale provò che $\mu(Z) \leq n+1$ per ogni insieme algebrico chiuso Z di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ (vedi [2]).
Una dimostrazione più semplice fu successivamente data da B.L. Van der Waerden; nel seguente teorema riportiamo tale dimostrazione nel caso delle curve in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, ma essa si può facilmente estendere al caso generale.

Teorema 2. *Per ogni curva C di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ è $\mu(C) \leq 4$*
Dimostrazione. Siano S e S' due superficie, prive di componenti comuni, contenenti C; l'intersezione $S \cap S'$ è costituita da C e da un'altra curva C'. Per ogni componente irriducibile $D_i, i = 1, \ldots, k$ prendiamo un punto P_i appartenente a D_i e non a C e sia S''_i una superficie passante per $C \cup \{P_1, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_k\}$ e non per P_i. Sia $f_i = 0$ l'equazione di S''_i: possiamo supporre che i polinomi $f_i, i = 1, \ldots, k$ abbiano tutti lo stesso grado; in tal caso la superficie S'' definita dal polinomio $f = \sum_1^k f_i$ contiene C ma non contiene nessuno dei punti $P_i, i = 1, \ldots, k$ e quindi l'intersezione $S \cap S' \cap S''$ è costituita da C e da un numero finito di punti $Q_i, i = 1, \ldots, h$.

Come prima possiamo costruire una superficie S''' contenente C ma non contenente nessuno dei punti $Q_i, i = 1, \ldots, h$. L''intersezione $S \cap S' \cap S'' \cap S'''$ è quindi costituita dalla sola curva C. $\square$

5. La quintica di Vahlen e il teorema di Kneser. Nel 1891 Karl Theodor Vahlen (1869-1945) portò l'esempio di una curva (quintica razionale con una quadrisecante) e affermò che tale curva non poteva essere ottenuta come intersezione di tre superficie (vedi [3]).
Molti anni dopo, nel 1941, Oskar Perron (1880-1975) con un calcolo esplicito trovò tre superficie di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ la cui intersezione era costituita dalla quintica di Vahlen (vedi [4]).
Successivamente nel 1960 Martin Kneser (1928-2004) provò che per ogni curva C di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ è $\mu(C) \leq 3$ (vedi [5]). Tale risultato è stato poi esteso da D. Eisenbud e E.G. Evans i quali hanno provato che $\mu(Z) \leq n$ per ogni insieme algebrico chiuso Z di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ (vedi [6]).
Riportiamo qui la dimostrazione originale di Kneser.

Teorema 3. *Per ogni curva C di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ è $\mu(C) \leq 3$.*
Dimostrazione. Escludiamo anzitutto il caso banale che C sia una retta e scegliamo le coordinate in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ in modo che il punto P di coordinate $(0, 0, 0, 1)$ stia in C. Sia $f(x, y, z) = 0$ l'equazione del cono irriducibile con vertice in P e contenente C; si vede facimente che esso è unico. Sia poi $g(x, y, z, t) = g_n(x, y, z)t^n + \ldots + g_0(x, y, z)$ un polinomio omogeneo che si annulla su C il cui grado in t è positivo e minimo possibile.
Per ogni polinomio $p \in I(C)$ di grado m in t si ha facilmente che $g_n^m \cdot p$ diviso per g dà un resto divisibile per f. Se facciamo questo per tutti i generatori di $I(C)$ deduciamo che esiste un intero e tale che $g_n^e \cdot I(C) \subseteq (f, g)$ e quindi l'intersezione tra le due superficie di equazioni $f = 0, g = 0$ è costituita da C e da una parte residua contenuta nell' intersezione dei due coni di equazioni $f = 0, g_n = 0$; siccome g_n non è multiplo di f e ciò per la minimalità di g, segue che D è composta da un numero finito di rette per P.
Siano $P = P_0, P_1, \ldots, P_r$ i punti comuni a C e D. Per il successivo lemma esiste un polinomio omogeneo k che si annulla su $P_0, P_1, \ldots, P_r$ ma non si annulla su nessun altro punto di D; k si annulla quindi su $C \cap D$ e quindi una sua potenza sta in $I(C) + I(D)$ cioè si può scrivere come somma $h + i, h \in I(C), i \in I(D)$. Allora h si annulla su C ma non si annulla su nessun punto di D distinto da $P = P_0, P_1, \ldots, P_r$. Segue che C è l'insieme delle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} f = 0 \\ g = 0 \\ h = 0 \end{cases}$$

e quindi il teorema è provato. $\square$

Lemma. *Sia D una unione di rette per P di coordinate $(0,0,0,1)$ e siano $P_1,\dots,P_r$ punti su D. Allora esiste un polinomio omogeneo $k(x,y,z,t)$ che si annulla su $P,P_1,\dots,P_r$ e non si annulla su nessun altro punto di D.*
Dimostrazione. Se $r=0$ basta prendere una opportuna forma lineare. Sia allora $r>0$ e per ciascun $i=1,\dots,r$ costruiamo un polinomio omogeneo k_i di grado opportuno, del tipo:

$$k_i(x,y,z,t)=l_i(x,y,z)t+m_i(x,y,z)$$

dove $l_i(x,y,z)$ omogeneo di grado s si annulla su tutte le rette di D ad eccezione della retta PP_i, $m_i(x,y,z)$ omogeneo di grado $s+1$ non si annulla identicamente su nessuna rette di D distinta dalla retta PP_i ed infine $k_i(x,y,z,t)$ si annulla su P_i.
Vediamo come costruire il polinomio k_i : si scelga l_i come prodotto di opportune forme lineari; inoltre si scelga $n_i(x,y,z)$ omogeneo di grado s che non si annulla identicamente su nessuna retta di D anch'esso come prodotto di opportune forme lineari. Poniamo $m_i=n_iL_i$ dove L_i è una generica forma lineare $L_i=\lambda x+\mu y+\nu z$ da determinare come segue.
Siano $x=a_iv, y=b_iv, z=c_iv, t=u$ equazioni parametriche della retta PP_i e siano $(u_i,v_i), v_i\neq 0$ le coordinate di P_i su tale retta; sostituendo queste equazioni nel polinomio k_i segue che basta determinare L_i in modo che:
(1) L_i non si annulla su nessuna retta di D distinta da PP_i;
(2) $l_i(a_i,b_i,c_i)u_i+n_i(a_i,b_i,c_i)(\lambda a_i+\mu b_i+\nu c_i)v_i=0$.
Nello spazio affine $\mathbb{C}^3$ di coordinate (λ,μ,ν) bisogna quindi scegliere un punto che non sta su nessuno dei piani individuati dalla condizione (1) ma sta sul piano dato dall'equazione (2).
Il polinomio $k=\Pi_{i=1}^n k_i$ è allora il polinomio richiesto. $\square$

In conclusione ricordiamo che è ancora aperta la questione se sia $\mu(C)=2$ per ogni curva C di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ cioè è ancora aperta la seguente congettura.

Congettura. *Ogni curva C di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ è I.C.I..*

Un banco di prova per questa congettura è costituito dalla *quartica razionale* del paragrafo 2: dopo tanti anni e tanti sforzi da parte di numerosi matematici **non** si è ancora riuscito a decidere se sia o no *I.C.I.*.

BIBLIOGRAFIA

[1] STRANO R. 1988 - *A characterization of complete intersection curves in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$.* Proceedings of the A.M.S., 104: 711-715.

[2] KRONECKER L. 1881 - *Grundzüge einer arithmetschen Theorie der algebraischen Grössen.* Jour. für Reine und Angew. Math., 92: 1-122.

[3] VAHLEN K.T. 1891 - *Bemerkung zur vollständingen Darstellung algebraischer Raumcurven.* Jour. für Reine und Angew. Math., 108: 346-347.

[4] PERRON O. 1941 - *Über das Vahlensche Beispiel zu einen Satz von Kronecker.* Math.Z., 47: 318-324.

[5] KNESER M. 1960 - *Über die Darstellung algebraischer Raumkurven als Durchschnitte von Flächen.* Arch. Math., 11: 157-158.

[6] EISENBUD D., EVANS E.G. 1973 - *Every algebraic set in n-space is the intersection of n hypersurfeces.* Inv. Math., 19: 107-112.