Invited Lecture	Bollettino Accademia Gioenia Sci. Nat.	Vol. 42	N.° 371	pp. 1 -15	Catania 2010	ISSN 0393 - 7143

Equazioni differenziali e ... altro

MARIO MARINO

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Catania
Viale Andrea Doria, 6 - 95125 *Catania, Italy. Email:* mmarino@dmi.unict.it

(Relazione tenuta nella seduta pubblica del 20.11.2009)

RIASSUNTO

Vengono introdotte le equazioni differenziali ordinarie e quelle a derivate parziali di tipo ellittico e parabolico, evidenziando i problemi applicativi ad esse legate (di Cauchy, di Dirichlet, di Neumann, di Cauchy-Dirichlet). Si tracciano poi i profili scientifici ed umani dei matematici John Nash ed Ennio De Giorgi (1928-1996), che, negli anni 50 del secolo scorso, hanno dato una definitiva risposta al XIX Problema di Hilbert sull'hölderianità e l'analiticità delle soluzioni deboli delle equazioni differenziali a derivate parziali di tipo ellittico e parabolico. L'Autore infine, dopo aver introdotto gli spazi di Morrey-Campanato e richiamato i risultati di differenziabilità di Campanato-Cannarsa per le soluzioni deboli dei sistemi non lineari ellittici in forma di divergenza, evidenzia i problemi connessi all'acquisizione della differenziabilità delle soluzioni deboli dei sistemi non lineari parabolici del secondo ordine.

Parole chiave: Equazioni differenziali, Equazioni differenziali a derivate parziali, XIX Problema di Hilbert, Regolarità, Storia.

SUMMARY

Differential equations and ... other

Both ordinary and elliptic or parabolic partial differential equations are introduced, together with some classical boundary-value problems (of Cauchy, Dirichlet, Neumann, or Cauchy-Dirichlet type) arising from applications. Life and scientific work of mathematicians John Nash and Ennio De Giorgi (1928-1996), who, in the mid-nineteenth century, completely solved the XIX Hilbert's Problem on the regularity of weak solutions to elliptic and parabolic equations, are then outlined. Finally, after introducing Morrey-Campanato spaces and recalling Campanato - Cannarsa's differentiability results for nonlinear elliptic systems in the divergence form, main questions concerning the regularity of weak solutions to second-order nonlinear parabolic systems are pointed out.

Key words: Differential equations, Partial differential equations, XIX Hilbert's Problem, Regularity, History.

È a tutti noto che non esiste il "Premio Nobèl" per la matematica.Il motivo per cui Alfred NOBEL (1833-1896) escluse questa disciplina da quelle meritevoli del premio non è però ben chiaro.Circola tra i matematici una divertente storiella che motiva questa esclusione. La storiella

è stata recentemente riportata in un articolo pubblicato nel Notiziario della Società Matematica Europea, che leggo nella sua traduzione dall'inglese.
≪*I matematici, da decenni usano mantenere viva la leggenda che vuole che la fidanzata di Alfred Nobel fosse fuggita con il matematico svedese Gosta MITTAG-LEFFLER (1846-1927), sicché Nobel non volle creare un premio che potesse esser vinto dal suo rivale. La vita sentimentale del Nobel non è ben documentata, non si sa quindi con esattezza se questa storiella è vera o falsa; il massimo della comicità si è raggiunto allorché i geologi e altri gruppi di scienziati provarono ad estendere storielle simili per la loro scienza. La verità è, con ogni probabilità, che Nobel - come industriale - era interessato ad "invenzioni" e "scoperte" e non vedeva la matematica idonea a questo*≫.
Nonostante questo "handicap", di tanto in tanto qualche matematico vince il premio, naturalmente in discipline diverse dalla propria. È questo, ad esempio, il caso del matematico statunitense John Forbes NASH Jr. che nel 1994 ottiene il Nobel per l'Economia per i suoi risultati degli anni '50 sui giochi noncooperativi.

John Nash, dalla cui vita trae spunto il film diretto da Ron HOWARD "A beautiful mind", vincitore di quattro "Oscar" e di altrettanti "Golden Globe", è da considerare un matematico "universale": passa infatti nelle sue ricerche scientifiche da un campo all'altro della matematica, ottenendo sempre risultati eccezionali. Nash, oltre che di teoria dei giochi, si occupa infatti di varietà algebriche, di meccanica quantistica e di teoria delle equazioni differenziali a derivate parziali. Fu Louis NIRENBERG del Courant Institute of Mathematical Sciences dell'Università di New York ad indirizzare, a metà degli anni '50, Nash allo studio delle equazioni differenziali a derivate parziali, segnalandogli un grosso quesito irrisolto nel settore: l'hölderianità e l'analiticità delle soluzioni delle equazioni differenziali a derivate parziali ellittiche e paraboliche. Nash, che affronta solo problemi ritenuti agli occhi di tutti di grande interesse e di difficile risoluzione, cominciò a studiare le equazioni differenziali non appena Nirenberg gli indicò il problema, documentandosi contemporaneamente sulla sua importanza e scoprendo l'illustre sua storia.

Il 6 agosto del 1900 si apre a Parigi al Palais des Congrès, sotto la regia di Henri POINCARÉ (1854-1912), il secondo congresso internazionale dei matematici. I lavori durano un'intera settimana e sono articolati in sei sezioni. Al congresso partecipano poco più di 250 studiosi, tra cui il matematico tedesco David HILBERT (1862-1943), considerato al pari di Poincaré una delle "punte di diamante" della ricerca matematica. Hilbert era stato invitato a partecipare al congresso come *plenary speaker*, ma qualche disattenzione e un ritardo nel rispondere alle sollecitazioni del comitato organizzatore, fanno scivolare la sua conferenza tra le comunicazioni. Nonostante questo inconveniente il suo discorso segnerà una tappa nella storia della matematica: Hilbert propone 23 rilevanti problemi matematici irrisolti, auspicandone la risoluzione nel corso del XX secolo. Nel problema 19) Hilbert pone ai matematici del XX secolo la domanda: ≪*Sono le soluzioni dei problemi regolari del calcolo delle Variazioni necessariamente analitiche?*≫ (1).
È proprio questo il problema che Nirenberg propone al giovane Nash. Così scrive nel 1998 Sylvia NASAR nella sua avvincente biografia di John Nash, *A beautiful mind* (tradotta in italiano con il titolo *Il genio dei numeri: storia di John Nash, matematico e folle* [19]):
≪*John prese a recarsi nell'ufficio di Nirenberg per discutere dei suoi progressi. Passarono però settimane prima che il collega* [*Nirenberg*] *si accorgesse che Nash stava arrivando da qualche parte. "Ci vedevamo di frequente. John diceva: "Credo che sia necessaria una diseguaglianza così e così. Penso sia vero che ... ". Molto spesso le sue speculazioni erano errate. Sembrava che procedesse a tentoni. Dava quell'impressione. Non ero molto sicuro che ce l'avrebbe fatta". Nirenberg mandò Nash a parlare con Lars HÖRMANDER,* [...] *uno dei più grandi esperti del*

(1) La lista completa dei 23 problemi di Hilbert si può, ad esempio, trovare in [6], pp. 19–20.

settore. [...] Hörmander conosceva Nash per sentito dire ma reagì con scetticismo ancora maggiore di Nirenberg. "Nash [...] si rivolse a me diverse volte: "che cosa ne pensi di questa o quest'altra equazione?". All'inizio le sue congetture erano palesemente false. [Erano] facili da smentire sulla base delle conoscenze riguardanti gli operatori a coefficienti costanti. Non aveva una grande esperienza in questo genere di problemi. Ricominciò tutto da capo senza servirsi delle tecniche comuni. Cercava sempre di ricavare i problemi ... [dalle conversazioni con gli altri]. Non aveva la pazienza necessaria a [studiarli]". Nash seguitò a procedere a tentoni ma con maggiore successo. "Dopo una o due volte", dice Hörmander, "propose idee che non erano così palesemente sbagliate". In primavera, Nash formulò teoremi di esistenza, di continuità [hölderiana] e di unicità utilizzando ancora una volta nuovi metodi di sua invenzione. Riteneva che i problemi difficili non dovessero essere oggetto di un attacco frontale. Affrontò la questione in modo ingegnoso e indiretto, dapprima trasformando le equazioni non lineari in equazioni lineari e poi analizzando queste ultime con mezzi non lineari. "Fu un colpo di genio", sostiene [Peter David] LAX, che seguì da vicino i progressi delle ricerche. "Non ho mai visto niente di simile [...]". La nuova scoperta di Nash (2) *attirò molta più attenzione del suo [precedente celebre] teorema sull'immersione. Convinse inoltre Nirenberg che John era un genio.*≫

Introduciamo ora brevemente le equazioni differenziali ordinarie e a derivate parziali. Siano n un intero positivo ed $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ una funzione reale delle $n+2$ variabili reali $x, y, y', \dots, y^{(n)}$, definita in un sottoinsieme non vuoto X dello spazio euclideo ad $n+2$ dimensioni. L'espressione:

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

dicesi *equazione differenziale ordinaria* di ordine n. Risolvere l'equazione differenziale (1) significa determinarne le *soluzioni* (o gli *integrali*), cioé le funzioni reali $y(x)$ definite in un certo intervallo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, ivi derivabili n volte almeno e tali che, per ogni $x \in (a, b)$, si ha:

$$(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in X$$

e

$$f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0\,, \tag{2}$$

dove $y'(x)$, $y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$ denotano le derivate, del primo, del secondo,..., dell'ennesimo ordine, della funzione $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ calcolate nel punto x di (a, b).
Notiamo che, se $y(x) : (a, b) \to \mathbb{R}$ è una soluzione in (a, b) dell'equazione differenziale (1) e se, per ogni fissata x in (a, b), la funzione: $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$, delle n+1 variabili reali $y, y', \dots, y^{(n)}$, è omogenea, cioé se, per ogni fissata x in (a, b), risulta:

$$f(x, cy, cy', \dots, cy^{(n)}) = cf(x, y, y', \dots, y^{(n)})\,, \quad \forall\, c \in \mathbb{R} \quad \text{e}\ \forall\,(y, y', \dots, y^{(n)})\,,$$

allora, per ogni $c \in \mathbb{R}$, la funzione: $cy(x) : (a, b) \to \mathbb{R}$ è pure soluzione in (a, b) della (1). Infatti dalla (2) segue, per ogni $c \in \mathbb{R}$ e per ogni $x \in (a, b)$:

$$cf(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0\,,$$

che, per l'omogeneità di f, si può così scrivere:

$$f(x, cy(x), cy'(x), \dots, cy^{(n)}(x)) = 0\,,$$

(2) Vedi J. Nash [20].

che mostra che anche la funzione: $cy(x) : (a, b) \to \mathbb{R}$ è soluzione in (a, b) dell'equazione differenziale (1). Quindi, *se f è omogenea* ([3]) *e se l'equazione differenziale* (1) *ha una soluzione, allora ne ha infinite.*
Se nella (1) la funzione f ha la forma: $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = -\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) + y^{(n)}$, dove $\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ è una funzione reale delle $n+1$ variabili reali $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, definita in un sottoinsieme non vuoto B dello spazio euclideo ad $n+1$ dimensioni, allora l'equazione differenziale (1) si può così scrivere:

$$y^{(n)} = \varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \,, \tag{3}$$

e si dice in *forma normale.*
In particolare la (3) si dice *lineare* se

$$\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = g(x) - a_n(x)y - a_{n-1}(x)y' - \cdots - a_1(x)y^{(n-1)} \,,$$

dove $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x), g(x)$ sono funzioni reali definite in uno stesso intervallo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Così, ad esempio, l'equazione differenziale ordinaria del primo ordine:

$$y' = ky \,, \quad k \in \mathbb{R} \,, \tag{4}$$

che, come è noto, dà l'accrescimento della biomassa di una coltura di battéri che si sviluppa in ambiente nutritivo adeguato o la quantità non ancora decaduta di una determinata sostanza in un campione radioattivo, è lineare. In questo caso è $n = 1$, $f(x, y, y') = -ky + y'$, $X = \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y) = ky$, $B = \mathbb{R}^2$, $g(x) = 0$, $a_1(x) = -k$ ([4]).
Si verifica immediatamente che la funzione: e^{kx} è soluzione in $\mathbb{R}$ della (4) e quindi, essendo, per ogni fissata x in $\mathbb{R}$, la funzione delle due variabili y, y': $f(x, y, y') = -ky + y'$ omogenea, ogni funzione del tipo: ce^{kx}, con $c \in \mathbb{R}$, è anche soluzione in $\mathbb{R}$ della (4).

Le soluzioni invece di una *equazione differenziale a derivate parziali* sono funzioni di due o più variabili reali. L'equazione differenziale nella funzione incognita $u(x, y) : \Omega \to \mathbb{R}$ (Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^2$ ([5])):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \,, \tag{5}$$

detta *di Laplace*, è a derivate parziali. Le sue soluzioni, che diconsi *funzioni armoniche in* Ω, sono le funzioni $u(x, y) : \Omega \to \mathbb{R}$ delle due variabili reali x e y tali che, per ogni $(x, y) \in \Omega$, la somma delle derivate parziali seconde "pure" è zero. Ad esempio, la funzione $u(x, y) = e^x \cos y$ è armonica in $\mathbb{R}^2$ perché, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si ha:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y \,, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = e^x \cos y \,, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -e^x \operatorname{sen} y \,, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -e^x \cos y \,,$$

([3]) Nel senso sopra precisato.

([4]) x rappresenta qui la variabile temporale.

([5]) Ricordiamo che un insieme Ω di $\mathbb{R}^2$ si dice *aperto* se ogni suo punto è ad esso *interno*, cioé è centro di un cerchio contenuto in Ω; *limitato* se esiste un cerchio che lo contiene. Ricordiamo inoltre che un punto di $\mathbb{R}^2$ si dice *esterno* ad Ω se è interno a $\mathbb{R}^2 \backslash \Omega$ e che la *frontiera* di Ω, che verrà denotata con il simbolo $\partial\Omega$, è l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^2$ che non sono interni ad Ω, né ad esso esterni. Definizioni analoghe valgono in $\mathbb{R}^n$.

quindi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = e^x \cos y - e^x \cos y = 0\,.$$

Queste soluzioni della (5) si chiamano anche *soluzioni forti* (o *classiche*), per distinguerle dalle *soluzioni deboli* che sono le funzioni $u(x,y) : \Omega \to \mathbb{R}$ appartenenti allo *spazio di Sobolev* $H^1(\Omega)$ ([6]) e tali che:

$$\iint_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\Big)\, dxdy = 0\,, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega)\,. \tag{6}$$

È noto dalla teoria del *Calcolo delle Variazioni* che ad equazioni del tipo (6) si perviene ad esempio quando si ricerca una funzione $u(x,y) : \Omega \to \mathbb{R}$ che renda minimo il funzionale integrale:

$$E(u) = \iint_\Omega F(x,y,u(x,y),Du(x,y))\, dxdy\,,$$

tra tutte le funzioni u che verificano opportune condizioni (vedi, ad esempio, E. Giusti [13]).

Anche l'equazione differenziale nella funzione incognita $u(x,y,t) : Q \to \mathbb{R}$ ($Q = \Omega \times]0,T[$, Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^2$, $0 < T < +\infty$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0\,, \tag{7}$$

detta *del calore*, è a derivate parziali. Le sue soluzioni sono stavolta le funzioni $u(x,y,t) : Q \to \mathbb{R}$ delle tre variabili reali x, y e t tali che, per ogni $(x,y,t) \in Q$, la differenza tra la somma delle derivate parziali seconde pure rispetto alle variabili x e y (*variabili spaziali*) e la derivata parziale prima rispetto alla *variabile temporale* t è zero.

L'equazione di Laplace (5) è il più semplice esempio di equazione differenziale a derivate parziali *lineare ellittica* del secondo ordine e si incontra nello studio di fenomeni fisici molto svariati. Ad esempio, nella teoria dell'attrazione newtoniana il potenziale gravitazionale è una funzione armonica esternamente alle masse. Per i moti non vorticosi di un fluido incompressibile il potenziale della velocità è pure una funzione armonica e tale è anche la temperatura in un corpo omogeneo isotropo in equilibrio termico. Questa analogia analitica tra fenomeni fisici di natura diversa si può mettere in relazione col fatto che, come si dimostra facilmente, l'operatore (*di Laplace*)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,,$$

è, a meno di un fattore costante, l'unico operatore differenziale lineare omogeneo del secondo ordine che sia invariante rispetto a cambiamenti di coordinate corrispondenti a rotazioni e

---

([6]) Siano Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ e k, p e ϑ tre numeri reali positivi, con k intero, $p \geq 1$ e $\vartheta < 1$. Il simbolo $H^{k,p}(\Omega)$ denota, qui e nel seguito, lo spazio delle $u \in L^p(\Omega)$ le cui *derivate deboli*, sino a quelle di ordine k, appartengono a $L^p(\Omega)$. $H_0^{k,p}(\Omega)$ è invece lo spazio delle $u \in H^{k,p}(\Omega)$ che si annullano (in senso opportuno) su $\partial\Omega$. Infine con $H^{k+\vartheta,p}(\Omega)$ denoteremo lo spazio delle $u \in H^{k,p}(\Omega)$ tali che:

$$[D^\alpha u]^p_{\vartheta,p,\Omega} = \int_\Omega dx \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{[\mathrm{dist}(x,y)]^{n+\vartheta p}}\, dy < +\infty\,,$$

per ogni multiindice α con $|\alpha| = k$.

Se $p = 2$ scriveremo più semplicemente $H^k(\Omega)$, $H_0^k(\Omega)$, $H^{k+\vartheta}(\Omega)$ in luogo di $H^{k,2}(\Omega)$, $H_0^{k,2}(\Omega)$, $H^{k+\vartheta,2}(\Omega)$.

traslazioni, e tale invarianza deve sussistere nei fenomeni considerati, che si svolgono in mezzi omogenei ed isotropi. L'equazione del calore (7) è invece il più semplice esempio di equazione differenziale a derivate parziali *lineare parabolica* del secondo ordine. Essa descrive fenomeni di eguagliamento di differenze sia di energia (conduzione del calore), sia di potenziale (conduzione elettrica), sia di densità del materiale (diffusione) ([7]).

Nelle applicazioni, più che la totalità delle soluzioni di una equazione differenziale, interessa la ricerca delle soluzioni verificanti certe condizioni *iniziali* o al *contorno*. Ad esempio, per l'equazione differenziale ordinaria in forma normale (3), nelle applicazioni si pone spesso il seguente *problema (di Cauchy* o *dei valori iniziali)*:

"Determinare la(e) soluzione(i) $y(x) : (a, b) \to \mathbb{R}$ della (3) tale(i) che:

$$y(x_0) = y_0\,,\ y'(x_0) = y'_0\,, \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}\,,$$

dove $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ sono numeri reali fissati (che nascono dal particolare problema applicativo considerato)".
Per le equazioni differenziali a derivate parziali di tipo ellittico (come la (5)), occorre spesso nelle applicazioni risolvere il seguente *problema (di Dirichlet* o I *problema al contorno)*:

"Determinare la(e) soluzione(i) $u(x, y) : \Omega \to \mathbb{R}$ dell'equazione differenziale assegnata tale(i) che:

$$u(x, y) = g_0(x, y) \quad \text{su} \ \ \partial\Omega\,,$$

dove $g_0(x, y) : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ è una fissata funzione (che nasce dal particolare problema applicativo considerato)", oppure il seguente *problema (di Neumann* o II *problema al contorno)*:

"Determinare la(e) soluzione(i) $u(x, y) : \Omega \to \mathbb{R}$ dell'equazione differenziale assegnata tale(i) che:

$$\frac{du(x, y)}{d\vec{n}} = g_1(x, y) \quad \text{su} \ \ \partial\Omega\,,$$

dove $\vec{n}$ è la normale alla frontiera di Ω, orientata, in ogni punto di $\partial\Omega$, verso l'esterno e $g_1(x, y) : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ è una fissata funzione".
Infine per le equazioni differenziali a derivate parziali di tipo parabolico (come la (7)), occorre spesso nelle applicazioni risolvere il seguente *problema (di Cauchy-Dirichlet)*:

"Determinare la(e) soluzione(i) $u(x, y, t) : Q \to \mathbb{R}$ dell'equazione differenziale assegnata tale(i) che:

$$u(x, y, 0) = g_2(x, y)\,,\ \forall\,(x, y) \in \Omega \quad \text{e} \quad u(x, y, t) = g_3(x, y, t) \quad \text{su} \ \ \partial\Omega\times]0, T[\,,$$

dove $g_2(x, y)$ e $g_3(x, y, t)$ sono funzioni reali assegnate, definite, rispettivamente, in Ω e in $\partial\Omega\times]0, T[$ (che nascono dal particolare problema applicativo considerato)".
Formulazioni deboli dei problemi di Dirichlet, di Neumann e di Cauchy-Dirichlet possono essere poi date per le equazioni differenziali ellittiche e paraboliche.
Molto vasta è la letteratura matematica riguardante l'*esistenza* e l'*unicità* di soluzioni dei problemi di Dirichlet, di Neumann e di Cauchy-Dirichlet. Altrettanto studiata è la *regolarità* (*differenziabilità, continuità hölderiana, analiticità*) delle soluzioni delle equazioni differenziali ellittiche e paraboliche, di cui tracceremo nel seguito un breve profilo storico.

Profondo studioso di equazioni differenziali, sia ordinarie che a derivate parziali, fu Mauro PICONE (1885-1977), che il nostro ateneo si onora di avere avuto fra i suoi docenti, prima nel

([7]) Per una trattazione elementare delle equazioni a derivate parziali vedi C. Pucci [22] e [23].

1919 come professore incaricato e successivamente, dopo un anno trascorso a Cagliari, come professore di ruolo. Picone, che lasciò Catania nel dicembre del 1923, fu uno dei più validi maestri che la storia della matematica ricordi. Il nostro concittadino Gaetano FICHERA (1922-1996), amato allievo di Picone, afferma che ≪*Picone fu Maestro formidabile, certo il più grande fra i Maestri che la Matematica italiana abbia avuto dopo Galileo, egli creò una Scuola qualitativamente e quantitativamente cospicua*≫. Tra le qualità di Picone atte a spiegare la ricchezza della sua scuola, l'allievo Carlo MIRANDA (1912-1982) sottolinea anche la capacità di trasfondere quell'entusiasmo per la ricerca e quella passione per il lavoro che costituivano il credo della sua vita. Per chi lavorava con Picone, non era possibile non subirne il fascino e non seguirne l'esempio. E questo valeva per persone diversissime per carattere e forma *mentis*, come furono in effetti i suoi allievi.

Il primo allievo di Picone fu Gabriele MAMMANA (1893-1942), zio del nostro consocio Carmelo MAMMANA; tra gli allievi più illustri di Picone figura Ennio DE GIORGI (1928-1996), docente di Analisi Matematica a Messina alla fine degli anni '50, chiamato poi a Pisa, presso la Scuola Normale Superiore, dove insegnò ininterrottamente sino alla sua scomparsa. Il mio Maestro Francesco GUGLIELMINO, allievo del già citato Carlo Miranda, ancora oggi ricorda con "terrore" gli anni in cui Ennio De Giorgi insegnava a Messina. In quegli anni era stato chiamato a Catania, come professore straordinario, un altro allievo di Picone, Carlo PUCCI (1925-2003), intimo amico di De Giorgi. Pucci ogni sabato invitava De Giorgi a Catania, presso il Seminario Matematico, per discutere con lui di Matematica, presentando le proprie ricerche e quelle dei giovani analisti catanesi, Francesco Guglielmino, Giuseppe SANTAGATI (1930-2007) e Giuseppe PULVIRENTI. Le domeniche erano poi dedicate a gite per la Sicilia, le cui mete venivano decise di volta in volta il sabato precedente. A queste gite partecipavano spesso gli analisti palermitani, "capitanati" da Benedetto PETTINEO (1922-2006), anch'egli allievo di Mauro Picone. Guglielmino, il più anziano degli analisti catanesi, che non guidava e viveva con la sola mamma a cui dedicava la domenica, per andare a Messa, al cimitero e a pranzo fuori casa, era costretto a fare salti mortali per accontentare mamma e maestri, non riuscendo naturalmente a soddisfare nè l'una nè gli altri.

Fu Guido STAMPACCHIA (1922-1978) a segnalare al giovane De Giorgi, nell'agosto del 1955, il XIX Problema di Hilbert, lo stesso problema segnalato nello stesso periodo da Nirenberg a John Nash. Così scrive in proposito Enrico MAGENES nel suo intervento di apertura dei lavori del Convegno per il 30^0 anniversario della scomparsa di Guido Stampacchia, organizzato il 6 novembre 2008 dall'Accademia Nazionale dei Lincei:

≪*In una bella giornata dell'agosto del '55, Guido, De Giorgi, Carlo Pucci ed io percorrevamo il sentiero cosiddetto del "Vial del Pan", che collega, nello stupendo scenario della Marmolada, il passo Pordoi al rifugio "Fedaia". Pucci ed io desideravamo procedere speditamente, ma eravamo costretti a fermarci ogni momento per aspettare i nostri due amici che discutevano tra di loro: Stampacchia spiegava a De Giorgi a che punto era la questione del XIX Problema di Hilbert*≫.
Meno di due mesi dopo, Ennio De Giorgi risolveva la questione, ottenendo il suo celebre risultato sulla regolarità hölderiana delle soluzioni delle equazioni lineari ellittiche del secondo ordine, in forma di divergenza a coefficienti di Borel, del tipo:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) = 0 \,, \quad n \text{ intero} \geq 2 \,,\; x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,,$$

che generalizzano l'equazione di Laplace (5) ([8]).

([8]) La (5) si ha infatti per n=2, a_{ij}=0 se $i \neq j$, a_{ij}=1 se i=j.

Il risultato viene comunicato da De Giorgi al Congresso dell'Unione Matematica Italiana in Pavia. Sarà Mauro Picone a presentare ai "Lincei", nei primi mesi del '56, la Nota preventiva del risultato raggiunto (vedi [7]) e poi, nell'adunanza dell'Accademia delle Scienze di Torino del 24 aprile 1957, la memoria *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*, contenente la dettagliata soluzione del XIX Problema di Hilbert, che verrà pubblicata lo stesso anno nel Tomo 3^0 - Parte I delle *Memorie* dell'Accademia (vedi [8]) ([9]).
L'episodio è così descritto da Sylvia Nasar nella citata biografia di Nash:
≪*Nash avrebbe ricordato quell'anno come un periodo di amare delusioni. A primavera inoltrata scoprì che alcuni mesi prima Ennio De Giorgi, un giovane sconosciuto italiano, aveva dimostrato il teorema di continuità [hölderiana]. Paul GARABEDIAN, matematico di Stanford e diplomatico francese all'ambasciata di Londra, lavorava al servizio dell'Ufficio per le ricerche navali. Nel gennaio del 1957 intraprese un lungo viaggio in auto attraverso l'Europa alla ricerca di giovani matematici. "A Roma vidi alcuni veterani. Era una sorta di rituale. Discutevi di matematica per mezz'ora. Poi pranzavi per tre ore. Poi facevi una siesta. Poi cenavi. Nessuno parlava di De Giorgi." Ma a Napoli qualcuno gliene parlò e Garabedian lo rintracciò mentre tornava a Roma. "Era un tipo sporco, ossuto, piccolo, dall'aria affamata. Ma venni a sapere che aveva scritto un saggio." De Giorgi* – prosegue Sylvia Nasar – [...] *proveniva da una famiglia leccese molto povera. Più tardi sarebbe diventato un idolo delle giovani generazioni. Non aveva alcuna vita al di fuori dello studio, non aveva moglie o altre relazioni personali e, anche più avanti, continuò letteralmente ad abitare in ufficio. Sebbene occupasse la più prestigiosa cattedra italiana di matematica, visse in assoluta miseria, del tutto dedito alla ricerca, all'insegnamento e, con il passar del tempo, a un crescente interesse per il misticismo, che lo indusse a tentare di dimostrare l'esistenza di Dio attraverso formule e teoremi. Lo scritto di De Giorgi era stato pubblicato nella sede più sconosciuta: il giornale di un'accademia regionale delle scienze. Garabedian riportò i risultati raggiunti dall'italiano nel notiziario europeo dell'Ufficio per le ricerche navali. Il resoconto che Nash redasse dopo aver vinto il Nobel [...] trasmette la sua bruciante delusione: "Ebbi un po' di sfortuna perché, senza che fossi informato a sufficienza su quanto altri stavano compiendo in quel campo, accadde che lavorassi in parallelo a Ennio De Giorgi, il quale operava a Pisa. Lui fu il primo a raggiungere la vetta [...], almeno per il caso, particolarmente interessante, delle equazioni ellittiche." [...] Nel 1994 Giancarlo ROTA (1932-1999), [...] ha affermato: "Quando venne a sapere di De Giorgi, Nash rimase alquanto scioccato. Alcuni pensavano addirittura che fosse stato quello il motivo del suo crollo."*≫
Il crollo a cui allude Rota è il ben noto passaggio di Nash dall'eccentricità e stravaganza ai cupi abbissi della schizofrenia, che per trent'anni, a partire dal 1959, lo portarono a vagare come un fantasma tra cliniche e manicomi, perduto a se stesso e alla matematica.
≪*Fu in Italia* – ha ricordato Nash – *che cominciai a udire lo squillo del telefono. Era un suono che mi rimbombava dentro di giorno e di notte e mi perseguitavano le visioni. Soffrivo di continui deliri a sfondo religioso e politico e il delirio è tremendo, come un sogno dal quale non riesci in alcun modo a svegliarti*≫. All'inizio degli anni '90 John Nash torna a se stesso: riprende gli studi di matematica, l'impegno a tempo pieno nell'università e la vita familiare. ≪*Ci sono riuscito a prezzo di grandi sofferenze* – commenta Nash – *e devo confessarvi che anche riconquistare la razionalità dopo essere vissuti nell'irrazionalità procura dolore*≫.

La prima volta che ho incontrato Ennio De Giorgi è stata a Catania nel maggio del 1973, in occasione di una sua visita al nostro Seminario Matematico in compagnia di Sergio CAMPANATO (1930-2005), anch'egli docente di Analisi Matematica a Pisa che diventerà di li a

([9]) In effetti nel 1939 Charles Bradfield MORREY Jr. (1907-1984) aveva risolto il XIX Problema di Hilbert nel caso particolare 2-dimensionale (vedi [18]).

qualche anno il mio secondo Maestro. Entrambi erano stati invitati a Messina da Dionisio TRISCARI, l'allievo messinese di De Giorgi, così un pomeriggio, accompagnati dal Triscari, vennero a Catania a tenere una conferenza Ennio ed una Sergio. L'impressione che ebbi di De Giorgi non corrisponde affatto alla descrizione di Garabedian. Ennio non era affatto "un tipo sporco, ossuto, piccolo, dall'aria affamata"; la prima impressione che di Lui si aveva era quella di un uomo di grande serenità, dalla profonda competenza, disponibile e modesto.
Ricordo che in occasione di quella visita di De Giorgi, mentre si chiaccherava nello "Studio di Analisi" del vecchio Seminario Matematico di Corso Italia, uno stanzone di 4 metri per 7 con tre sole scrivanie, in cui lavoravano e ricevevano gli studenti tutti i docenti e gli assistenti di Analisi Matematica (Arena, Caponetto, Frasca, Giovene, Guglielmino, Marino, Maugeri, Nicolosi, Pulvirenti, Santagati, Tuccari), Santagati e Pulvirenti si appartarono con Ennio De Giorgi e, seduti nel tavolo più isolato dello stanzone, posero a Ennio un quesito di teoria dei Controlli su cui da tempo indagavano inutilmente. Ennio, dopo alcune domande volte a ben inquadrare l'argomento, in meno di mezz'ora, nonostante la "baraonda" che c'era nello studio, riuscì a proporre ai "due Pippi" un'idea che sviluppata nei giorni seguenti consentì loro di risolvere il problema.

Questa è la descrizione che Mario MIRANDA, allievo di De Giorgi, fa del Maestro nell'articolo *Un ricordo di Ennio De Giorgi*, pubblicato nel volume "Per Ennio De Giorgi", edito dal Dipartimento di Matematica dell'Università di Lecce (vedi [17]):
≪*Fui suo allievo, collega ed amico. Arrivai a conoscerlo molto bene, attratto dal suo fascino e grazie alla sua disponibilità. Ho sentito parlare da molti della sua solitudine, come se questa fosse dovuta alla sua incapacità di organizzarsi la vita. Non condivido affatto questo giudizio. Ennio ha vissuto una vita eccezionale e molto disciplinata. Vita segnata dalla morte del padre, quando Ennio aveva appena compiuto i due anni d'età. [...] Aveva lasciato Lecce nel 1946 per andare a studiare a Roma, dove era stato preceduto dalla sorella Rosa. E Roma divenne la sua seconda città. [...] Dopo i dodici anni romani e i dodici mesi dell'intermezzo messinese, il trasferimento a Pisa, la sua terza città che lo ospitò per trentasette anni. [...] Parigi fu la sua quarta patria, vi era amato e rispettato come fosse una gloria di Francia. [...] Una conferma di quanto profondamente fosse entrato nei cuori di coloro che lo avevano frequentato, la si ebbe nei suoi momenti di difficoltà per motivi di salute. Per aiutarlo a sconfiggere il minaccioso male manifestatosi nell'autunno del 1992 si mobilitarono i familiari, gli amici e i colleghi in Italia e in Francia. Questa mobilitazione e la sua voglia di vivere ebbero la meglio sulla malattia. Più insidioso fu il male che in meno di due mesi, fra l'estate e l'autunno del 1996, lo vinse. In tre occasioni durante quel mese di ottobre fui a Pisa per stare un po' con lui in ospedale, dove continuo era il flusso di visitatori che offrivano il loro aiuto. L'ultima volta arrivai la sera del 23 ottobre. [...] Andai [poi] da Ennio, con i giornali che riportavano il messaggio del Papa agli Accademici Pontifici, contenente la nuova interessantissima posizione del Pontefice sui rapporti tra religione e scienza. Nonostante la febbre, l'alta frequenza cardiaca e la respirazione affannosa, Ennio mi parlò a lungo con grande entusiasmo delle novità nell'atteggiamento della sua Chiesa [...] Lo salutai, sapendo che non lo avrei più rivisto. Appena uscito, mi adoperai perché venissero immediatamente richiamati i familiari da Lecce. Dopo un rocambolesco viaggio notturno, la nipote Anna Dina riuscì ad essere da lui l'indomani alle dodici. Ennio, per nulla stupito del suo improvviso ritorno, le dettò la bellissima lettera per il Papa: "Santità: sono matematico, accademico pontificio attualmente ricoverato presso l'ospedale di Pisa. Le mie condizioni di salute mi consentono di dettare solo poche righe, [tuttavia] ho sempre sostenuto l'amicizia e la comprensione tra tutti i gruppi religiosi e culturali, ho sempre affermato ciò che la Dichiarazione Universale dei Diritti Umani del 10.12.1948 chiama "dignità e valore della persona umana". Non credo che questa dignità e questo valore siano definibili solo con i metodi delle scienze*

naturali, perciò ho molto ammirato il suo discorso del 22.10.1996 e penso che resterà nella Storia della Chiesa, della Scienza, della Cultura e della Civiltà" (10). *Anna Dina lo lasciò nel pomeriggio per andare ad incontrare la zia Rosa. Dopo pochi minuti Ennio cessò di vivere. Era venerdì 25 ottobre 1996≫.*

Sergio Campanato, nel periodo della sua visita con De Giorgi a Catania, si occupava di questioni di teoria delle equazioni differenziali molto vicine a quelle su cui indagava De Giorgi. In particolare aveva da poco risolto problemi di differenziabilità e di hölderianità per la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione differenziale astratta del primo ordine:

$$A(t)u + Ju' = f(t)\,,$$

in spazi di Hilbert (11). Questo fu l'argomento della conferenza da Lui tenuta a Catania in quel lontano maggio del 1973. Alla fine della conferenza suggerì lo studio di una eventuale estensione dei risultati alle equazioni differenziali astratte del secondo ordine del tipo:

$$A(t)u + \mu u' + u'' = f(t)\,. \tag{8}$$

Affrontai subito il problema, riuscendo a provare che la soluzione u del problema di Cauchy per l'equazione (8) appartiene allo spazio $H^{\vartheta}(-\infty, T; V) \cap H^{1+\vartheta}(-\infty, T; H)$ (12), estendendo così alle equazioni differenziali astratte del secondo ordine i risultati di differenziabilità di Campanato (13). Questo fu l'inizio della collaborazione con Sergio, che coinvolse qualche anno dopo anche l'amico Antonino MAUGERI.

Le visite di Sergio Campanato a Catania divennero un appuntamento scientifico fisso: almeno due volte l'anno, generalmente in giugno e novembre, ci onorava della Sua presenza, illustrando via via i risultati da Lui ottenuti e tenendo anche corsi per i giovani del dottorato di ricerca in Matematica del nostro ateneo. Assidui frequentatori di questi incontri erano anche gli amici analisti di Messina e di Reggio Calabria, che spesso Sergio raggiungeva nelle loro sedi.

Sergio Campanato spirò a Pisa l'1 marzo del 2005 per i postumi di una brutta bronchite. A Catania era venuto per l'ultima volta nel febbraio del 1995. Ricordo che era accompagnato dalla moglie per le grosse difficoltà di deambulazione causate da una malattia neurologica non ben diagnosticata. Quando lasciò Catania per rientrare a Pisa mi abbracciò e piangendo disse: ≪*Mario a Catania non potrò più ritornare*≫. A Catania Sergio non tornò più e non si occupò più di Matematica. Per vari anni ancora incontrai Sergio Campanato a Pisa nella sua abitazione di Via Venanzio Nisi, dove passava le giornate seduto in poltrona, fumando la pipa, bevendo caffè d'orzo e guardando attraverso la finestra la vecchina che nel balcone del palazzo di fronte innaffiava i fiori.

Nel 1973, quando Sergio Campanato venne per la prima volta a Catania, era già molto noto presso la comunità matematica internazionale per aver introdotto e studiato gli spazi $\mathcal{L}^{p,\lambda}$, oggi noti come *spazi di Morrey-Campanato*, i cui elementi sono, per opportuni valori di λ, funzioni hölderiane.

Richiamiamo la definizione di funzione hölderiana ed introduciamo gli spazi $\mathcal{L}^{p,\lambda}$.

(10) Vedi [11].
(11) Vedi [2], [3] e [4].
(12) $\vartheta \in]0,1[$, V ed H sono spazi di Hilbert complessi e separabili con V contenuto in H algebricamente e topologicamente, V denso in H.
(13) Vedi [14].

Siano Ω un aperto limitato dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$, α, p e λ tre numeri reali, con $\alpha \in]0,1]$, $p \geq 1$, $\lambda \in [0, n+p]$, ed f una funzione reale definita in Ω. La funzione f si dice *α-hölderiana* in Ω (o hölderiana in Ω con esponente di hölderianità α) se

$$[f]_{\alpha,\Omega} = \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{[\text{dist}(x,y)]^\alpha} < +\infty \ (^{14}).$$

In particolare se f è α-hölderiana in Ω, con $\alpha = 1$, allora si dice anche che f è *lipschitziana* in Ω. Il simbolo $C^{0,\alpha}(\Omega)$ denota lo spazio delle funzioni α-hölderiane in Ω. $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ denota invece lo spazio delle $f \in L^p(\Omega)$ tali che:

$$[f]^p_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)} = \sup_{\substack{x^0 \in \Omega \\ 0 < \rho \leq d_\Omega}} \int_{\Omega \cap I(x^0,\rho)} |f(x) - f_{\Omega \cap I(x^0,\rho)}|^p \, dx < +\infty \,,$$

dove $d_\Omega = \sup\{\text{dist}(x,y), x, y \in \Omega\}$ è il *diametro* di Ω, $I(x^0, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, x^0) < \rho\}$ è la *palla* di $\mathbb{R}^n$ di centro x^0 e raggio ρ e $f_{\Omega \cap I(x^0,\rho)}$ è la *media integrale* di f su $\Omega \cap I(x^0, \rho)$:

$$f_{\Omega \cap I(x^0,\rho)} = \frac{1}{\text{mis}[\Omega \cap I(x^0,\rho)]} \int_{\Omega \cap I(x^0,\rho)} f(x) \, dx \,.$$

In [1], Campanato dimostra che, se λ è maggiore di n, lo spazio $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ è *isomorfo* allo spazio $C^{0,\alpha}$, con $\alpha = \frac{\lambda - n}{p}$, studiare quindi la regolarità hölderiana delle soluzioni delle equazioni differenziali a derivate parziali equivale a studiare l'appartenenza di dette soluzioni a spazi di tipo $\mathcal{L}^{p,\lambda}$. Questo metodo, sviluppato da Campanato a metà degli anni '60, presenta, come giustamente afferma Enrico GIUSTI nell'Introduzione del suo Quaderno dell'Unione Matematica Italiana sulle "Equazioni ellittiche del secondo ordine" [12], indubbi vantaggi perché consente di evitare la trattazione "classica", basata sulla rappresentazione delle soluzioni mediante integrali, e di "trovare le maggiorazioni di Shauder, e di qui i risultati di esistenza e regolarità, in maniera particolarmente elegante e senza far uso della teoria del potenziale". Il metodo di Campanato, oltre alle caratteristiche di eleganza, ha una notevole serie di applicazioni; lo si può utilizzare nello studio delle equazioni differenziali lineari ellittiche e paraboliche, per le equazioni differenziali non lineari e per i sistemi di equazioni differenziali a derivate parziali. Le potenzialità del metodo "sembrano ancora lungi dall'essere esaurite".
Strettamente legato al problema della regolarità hölderiana è quello della differenziabilità, che consiste nel determinare, per le soluzioni classiche (o deboli) u appartenenti a C^h (o a H^h) di una equazione differenziale a derivate parziali, uno spazio C^k (o H^k), strettamente contenuto in C^h (o in H^h), cioé con $k > h$, a cui u appartiene.
È, ad esempio, ben noto che se $u \in C^2(\Omega)$ ed è soluzione in Ω dell'equazione di Laplace (5) (u armonica in Ω), allora u è infinitamente derivabile in Ω, cioé $u \in C^\infty(\Omega)$. Questo è un risultato di differenziabilità per le soluzioni dell'equazione di Laplace.
Negli anni '80, Sergio Campanato e Piermarco CANNARSA stabilirono interessanti risultati di differenziabilità per le soluzioni deboli dei sistemi di equazioni differenziali non lineari di tipo ellittico di ordine $2m$ (m intero ≥ 1). In particolare in [5] provarono che *se $u \in H^m(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C^{m-1,\lambda}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ (N intero ≥ 1, $\lambda \in]0,1[$) è una soluzione debole in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ del sistema non lineare ellittico di ordine $2m$:*

$$\sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a^\alpha(x, Du) = 0 \,,$$

(14) È chiaro che una funzione α-hölderiana in Ω è ivi uniformemente continua.

allora $u \in H^{m+1}_{\rm loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$.
Venuto a conoscenza del risultato, proposi alla Prof.ssa Luisa FATTORUSSO, dell'Università di Reggio Calabria, allora assistente alla cattedra di Analisi Matematica dell'Università di Messina, di estendere il risultato alle soluzioni deboli dei sistemi non lineari parabolici in forma di divergenza, cominciando dal caso dei sistemi di equazioni del secondo ordine. Nel lavoro [9], Luisa Fattorusso riuscì a provare che *se* $u \in L^2(0,T,H^1(\Omega,\mathbb{R}^N)) \cap C^{0,\lambda}(\bar{Q},\mathbb{R}^N)$ *è una soluzione debole in* $Q = \Omega \times]0,T[\subset \mathbb{R}^{n+1}$ *del sistema non lineare parabolico del secondo ordine:*

$$-\sum_{i=1}^{n} D_i a^i(x,t,u,Du) + \frac{\partial u}{\partial t} = B^0(x,t,u,Du)\,, \tag{9}$$

allora $u \in L^2(0,a,H^{1+\vartheta}_{\rm loc}(\Omega,\mathbb{R}^N))$, *per ogni* $a \in]0,T[$ *e per ogni* $\vartheta \in]0,1[$, non riuscendo però a provare l'appartenenza di u allo spazio $L^2(0,a,H^2_{\rm loc}(\Omega,\mathbb{R}^N))$, quindi ad estendere "in pieno" ai sistemi parabolici il risultato dimostrato da Campanato e Cannarsa per i sistemi ellittici. Qualche anno dopo, io e l'amico Antonino Maugeri scoprimmo che la piena estensione al caso parabolico del risultato di Campanato-Cannarsa, cioé l'appartenenza allo spazio di Sobolev

$$L^2(0,a,H^2_{\rm loc}(\Omega,\mathbb{R}^N))$$

della soluzione debole

$$u \in L^2(0,T,H^1(\Omega,\mathbb{R}^N)) \cap C^{0,\lambda}(\bar{Q},\mathbb{R}^N)$$

del sisterma non lineare parabolico (9), era legata all'acquisizione di un risultato di interpolazione del tipo di Gagliardo-Nirenberg per funzioni appartenenti a spazi di Sobolev con esponenti frazionari, se cioé era possibile estendere il risultato di Nirenberg seguente ([15]):

Se $u \in H^{m,r} \cap C^{s,\lambda}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, *m intero* ≥ 2, $1 < r < +\infty$, *s intero non negativo,* $0 < \lambda < 1$, $s < m-1$, *allora, per ogni intero j, con* $s + \lambda < j < m$, *risulta:* $u \in H^{j,p}$, *dove* $\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + a\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) - (1-a)\frac{s+\lambda}{n}$, *per ogni* $a \in \left[\frac{j-s-\lambda}{m-s-\lambda}, 1\right[$

al caso delle funzioni $u \in H^{m+\vartheta,r} \cap C^{s,\lambda}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, con m intero ≥ 1 e $\vartheta \in]0,1[$, allora era anche possibile estendere ai sistemi parabolici il risultato di differenziabilità dato da Campanato-Cannarsa per i sistemi ellittici in [5].
Nell'ottobre del 1994 scrivemmo a Nirenberg chiedendo se era a conoscenza dell'esistenza di un risultato di interpolazione simile a quello da noi ipotizzato. La risposta fu negativa: ≪*The question you ask, in your October 1 letter, is indeed a very interesting one; I do not see how to prove or disprove it.*≫ Nel 1996, grazie all'uso della teoria degli spazi di Besov, suggeritaci da Hans TRIEBEL, riuscimmo a provare il seguente risultato ([16]):

Se $u \in H^{m+\vartheta,r} \cap C^{s,\lambda}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, *m intero* ≥ 1, $0 < \vartheta,\ \lambda < 1$, $1 < r < +\infty$, *s intero non negativo,* $s < m$, *allora, per ogni j con* $\max(s+\lambda, m+\vartheta-\frac{n}{r}) < j < m+\vartheta$, *si ha:* $u \in H^{j,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, *dove* $\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + a\left(\frac{1}{r} - \frac{m+\vartheta}{n}\right) - (1-a)\frac{s+\lambda}{n}$, *per ogni* $a \in \left[\frac{j-s-\lambda}{m-s-\lambda+\vartheta}, 1\right[$ *con* $(1-a)(s+\lambda) + a(m+\vartheta)$ *non intero*

e quindi a dimostrare l'appartenenza allo spazio $L^2(0,a,H^2_{\rm loc}(\Omega,\mathbb{R}^N))$ delle soluzioni deboli

$$u \in L^2(0,T,H^1(\Omega,\mathbb{R}^N)) \cap C^{0,\lambda}(\bar{Q},\mathbb{R}^N)$$

del sistema non lineare parabolico (9).

([15]) Vedi L. Nirenberg [21].
([16]) Vedi M. Marino - A. Maugeri [15] e [16].

Comunicammo a Nirenberg il risultato di interpolazione a cui eravamo pervenuti a Venezia nel giugno del 1996, in occasione del convegno "Recent Advances in Partial Differential Equations and Applications", organizzato, per festeggiare i suoi 70 anni e quelli di Peter David Lax, presso l'Ateneo Veneto in Campo San Fantin, non lontano dalle ancora fumanti ceneri del glorioso teatro "La Fenice". Al convegno era anche presente Ennio De Giorgi, che in quella occasione tenne una interessantissima conferenza sulle teorie base dei fondamenti della Matematica e che probabilmente fu l'ultima della sua vita.
L'uso del risultato di interpolazione di Marino-Maugeri ha consentito recentemente di stabilire la differenziabilità anche per le soluzioni deboli dei sistemi non lineari parabolici del secondo ordine con non linearità $q \in (1,2)$. In [10] è infatti provato che

Se $u \in L^q(0,T,H^{1,q}(\Omega,\mathbb{R}^N)) \cap C^{0,\lambda}(\overline{Q},\mathbb{R}^N)$, $1 < q < 2$, $0 < \lambda < 1$, *è una soluzione debole del sistema non lineare parabolico* (9), *se i coefficienti* $a^i(x,t,u,p)$, $i = 1,2,\dots,n$, $(x,t,u) \in Q \times \mathbb{R}^N$, *soddisfano le condizioni:*
per ogni $x \in \Omega$, $y \in B(x, \frac{1}{\sqrt{2}}\, d_x)$ (17), $t \in]0,T[$, u, $v \in \mathbb{R}^N$ *con* $\|u\|$, $\|v\| \le K$, $p \in \mathbb{R}^{nN}$, *si ha :*

$$\|a(x,t,u,p)\| \le M(K)\,(1+\|p\|^2)^{\frac{q-1}{2}}\ (^{18}),$$

$$\|a(x,t,u,p) - a(y,t,v,p)\| \le M(K)(\|x-y\| + \|u-v\|)\,(1+\|p\|^2)^{\frac{q-1}{2}}\ ;$$

le applicazioni $p \to a^i(x,t,u,p)$, $i = 1,2,\dots,n$, $(x,t,u) \in Q \times \mathbb{R}^N$, *sono strettamente monotone con non linearità* $1 < q < 2$, *nel senso che esistono due costanti positive* $M(K)$ *e* $\nu(K)$ *tali che, per ogni* $(x,t,u) \in Q \times \mathbb{R}^N$, *con* $\|u\| \le K$, *e per ogni* p, $\bar{p} \in \mathbb{R}^{nN}$, *risulta:*

$$\|a(x,t,u,p) - a(x,t,u,\bar{p})\| \le M(K)\|p-\bar{p}\|(1+\|p\|^2+\|\bar{p}\|^2)^{\frac{q-2}{2}}\ ,$$

$$\big(a(x,t,u,p) - a(x,t,u,\bar{p})\big|p-\bar{p}\big) \ge \nu(K)\|p-\bar{p}\|^2(1+\|p\|^2+\|\bar{p}\|^2)^{\frac{q-2}{2}}\ ,$$

e se, per ogni $x \in \Omega$, $y \in B(x, \frac{1}{\sqrt{2}}\, d_x)$ $(d_x = \mathrm{dist}(\{x\},\partial\Omega) > 0)$, $t \in]0,T[$, u, $v \in \mathbb{R}^N$ *con* $\|u\|$, $\|v\| \le K$, p, $\bar{p} \in \mathbb{R}^{nN}$, *si ha:*

$$\|B^0(x,t,u,p)\| \le M(K)\,(1+\|p\|^2)^{\frac{q}{2}}\ ,$$

$$\|B^0(x,t,u,p) - B^0(y,t,v,p)\| \le M(K)(\|x-y\| + \|u-v\|)\,(1+\|p\|^2)^{\frac{q}{2}}\ ,$$

$$\|B^0(X,u,p) - B^0(X,u,\bar{p})\| \le M(K)\|p-\bar{p}\|(1+\|p\|^2+\|\bar{p}\|^2)^{\frac{q-1}{2}}\ ,$$

allora $u \in L^q(0,a,H^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega,\mathbb{R}^N)) \cap H^{1,q}(0,a,L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega,\mathbb{R}^N))$, *per ogni* $a \in]0,T[$.
Lo studio della regolarità per le soluzioni deboli dei sistemi non lineari parabolici in forma di divergenza è ben lungi dall'essere esaurito: mancano ancora risultati di differenziabilità e di hölderianità per i sistemi di ordine superiore al secondo.
I metodi di Campanato, basati sull'uso degli spazi $\mathcal{L}^{p,\lambda}$, si possono utilmente impiegare anche nello studio della regolarità delle soluzioni di *disequazioni variazionali* ... ma questa è un'altra storia.

---

(17) Se $x^0{=}(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$ è un elemento di $\mathbb{R}^n$ e se σ è un numero reale positivo, il simbolo $B(x^0,\sigma)$ denota il cubo di $\mathbb{R}^n$: $\{x{=}(x_1,x_2,\dots,x_n){\in}\mathbb{R}^n{:}|x_i{-}x_i^0|{<}\sigma\ ,\ i{=}1,2,\dots,n\}$.
(18) $a(x,t,u,p){=}(a^1(x,t,u,p)|a^2(x,t,u,p)|\dots|a^n(x,t,u,p)){\in}\mathbb{R}^{nN}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] CAMPANATO S. 1963 - *Proprietà di hölderianità di alcune classi di funzioni.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (3) 17: 175–188.

[2] CAMPANATO S. 1972 - *Un risultato di regolarità della soluzione del problema di Cauchy per equazioni differenziali del I ordine in spazi di Hilbert.* Boll. Un. Mat. Ital., (4) 6: 112–121.

[3] CAMPANATO S. 1972 - *Una osservazione alla Nota: ≪Un risultato di regolarità della soluzione del problema di Cauchy per equazioni differenziali del I ordine in spazi di Hilbert≫.* Boll. Un. Mat. Ital., (4) 6: 131–133.

[4] CAMPANATO S. 1972 - *Risultati di regolarità locale e globale per soluzioni di equazioni differenziali del I ordine in spazi di Hilbert, I.* Boll. Un. Mat. Ital., (4) 6: 351–368.

[5] CAMPANATO S., CANNARSA P. 1981 - *Differentiability and partial Hölder continuity of the solutions of non-linear elliptic systems of order* $2m$ *with quadratic growth.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (4) 8: 285–309.

[6] CATANESE F. 2000 - *Hilbert presso la Georg August Universität Göttingen: ieri ed oggi. In: Mammana C. ed. "Il pensiero di David Hilbert a cento anni dai Grundlagen der Geometrie e dal Congresso internazionale di Parigi".* Le Matematiche, 55-Suppl.1: 7–24.

[7] DE GIORGI E. 1956 - *Sull'analiticità delle estremali degli integrali multipli.* Rend. Acc. Naz. Lincei, (8) 20-4: 438–441.

[8] DE GIORGI E. 1957 - *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari.* Mem. Acc. Sci. Torino, (3) 3-I: 25–43.

[9] FATTORUSSO L. 1987 - *Sulla differenziabilità delle soluzioni di sistemi parabolici non lineari del secondo ordine ad andamento quadratico.* Boll. Un. Mat. Ital., (7) 1-B: 741–764.

[10] FATTORUSSO L., MARINO M. - *Interior differentiability results for nonlinear variational parabolic systems with nonlinearity* $1 < q < 2$. In corso di stampa su MedJM.

[11] GIOVANNI PAOLO II. 1996 - *Intervento sulla Teoria dell'Evoluzione.* Pontificia Accademia delle Scienze, Assemblea Plenaria del 22 Ottobre 1996.

[12] GIUSTI E. 1978 - *Equazioni ellittiche del secondo ordine.* Quaderni dell'Unione Matematica Italiana, 6, Pitagora Editrice, Bologna, 213 pp.

[13] GIUSTI E. 1994 - *Metodi diretti nel Calcolo delle Variazioni.* Unione Matematica Italiana, Bologna, 422 pp.

[14] MARINO M. 1975 - *Un risultato di regolarità della soluzione del problema di Cauchy per certe equazioni differenziali del secondo ordine in spazi di Hilbert.* Ricerche di Matematica, 24: 152–171.

[15] MARINO M., MAUGERI A. 1995 - *Differentiability of weak solutions of nonlinear parabolic systems with quadratic growth.* Le Matematiche, 50: 361–377.

[16] MARINO M., MAUGERI A. 2008 - *Generalized Gagliardo-Nirenberg estimates and differentiability of the solutions to monotone nonlinear parabolic systems.* J. Glob. Optim., 40: 185–196.

[17] MIRANDA M. 2000 - *Un ricordo di Ennio De Giorgi. In "Per Ennio De Giorgi".* Dip. Matematica Univ. Lecce, Liguori Editore, Napoli: 55–56.

[18] MORREY C.B. 1943 - *Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics*. Univ. California, Publ. Math.

[19] NASAR S. 1999 - *Il genio dei numeri: storia di John Nash, matematico e folle*. Rizzoli, Milano, 442 pp.

[20] NASH J. 1958 - *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations*. Amer. J. Math., 80: 931–954.

[21] NIRENBERG L. 1966 - *An extended interpolation inequality*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (3) 20: 733–737.

[22] PUCCI C. 1960 - *Equazioni a derivate parziali*. Lezioni raccolte da Luciana Castiglione, Alfredo Novelli, Claudio Rea, Bruno Rizzi, Roma, 144 pp.

[23] PUCCI C. 1964 - *Equazioni ellittiche*. Lezioni ciclostilate, Genova, 158 pp.