Sul calcolo numerico: l'esempio del campo di Higgs

Maurizio Consoli

L'importanza del campo di Higgs proviene dal presente 'modello standard' delle particelle elementari. Lo stato di minima energia della teoria corrisponderebbe infatti ad un suo valore non nullo e questo darebbe origine alla massa di tutte le particelle. Tralasciando le motivazioni che hanno condotto a questa visione, per la quale quello che chiamiamo 'vuoto' andrebbe piuttosto pensato come una forma di condensato superfluido, non si può negare la rilevanza concettuale di questa prospettiva. Proprio per rilevare tracce di questo vuoto e scoprire la particella di Higgs, la comunità scientifica ha dunque concepito l'ambizioso progetto LHC (Large Hadron Collider) del CERN costato finora nel suo complesso circa 6 miliardi di Euro.

A partire dalla prima formulazione teorica, che risale alla metà degli anni Sessanta, il campo di Higgs è stato principalmente studiato con tecniche perturbative partendo dalla sua descrizione di base come interazione a due corpi di contatto (tipo 'sferette rigide'). In questo quadro, il valore medio non nullo del campo

$$\langle \Phi \rangle \neq 0$$

è legato alla costante di Fermi delle interazioni deboli. Le deviazioni quantizzate del campo dal suo valore medio (che potremmo definire le 'eccitazioni del condensato') sono le particelle di Higgs. Esse hanno una massa **M** non nulla e sono quelle cercate negli esperimenti a LHC.

Tali particelle, vanno distinte dai quanti più elementari della teoria il cui fenomeno di condensazione primordiale (probabilmente avvenuto in connessione con il processo di espansione dell'universo) ha dato luogo allo stato di vuoto presente. Questi quanti elementari sono spesso anch'essi chiamati (impropriamente) particelle di Higgs ma sono fisicamente distinti e si pensa che non siano neppure direttamente osservabili, essendo, per così dire, 'ghiacciati' nello stato di vuoto. Solo inducendo una transizione di fase nella quale si riuscisse ad alzare la temperatura a livelli straordinari e, come dice Regge, fare 'bollire' il condensato, si potrebbe ristabilire la forma di vuoto primordiale di cui essi sono le vere particelle fondamentali.

Per visualizzare questo concetto, si pensi all'elio superfluido a bassissime temperature. In questo caso, le 'particelle elementari', cioè i modi elementari con cui l'elio superfluido reagisce ad una perturbazione esterna, sono rappresentati dai fononi (modi di compressione del sistema) e dai rotoni (modi vorticosi) e non dal moto di singoli atomi di elio. Nonostante questi ultimi costituiscano la vera materia prima del superfluido essi non sono direttamente osservabili e se non sapessimo, da altre fonti, della loro esistenza rappresenterebbero un qualcosa di 'metafisico' introdotto cioè come puro modello concettuale per descrivere il sistema fisico in esame.

Detto questo, ritorniamo al campo di Higgs. Secondo la teoria perturbativa, l'intensità delle sue interazioni cresce proporzionalmente al valore della massa **M**. Di conseguenza, per grandi **M,** alcuni settori crescerebbero in modo incontrollato. Questo determinerebbe l'incapacità del modello a descrivere i fenomeni su scale di lunghezza minori di

$$\mathbf{a(M)} \approx \frac{\hbar}{\mathbf{Mc}} \mathbf{exp}\left(-\frac{\mathbf{M}^2_{\mathbf{max}}}{\mathbf{M}^2}\right)$$

dove è stata introdotta la costante di Planck $\hbar$ e la velocità della luce **c .**

Il valore massimo stimato di **M**

$$\mathbf{M_{max} \approx 10^3 m_p}$$

è dato in unità di massa del protone. Così la massa **M** della particella di Higgs misurerebbe il 'grado di località' della teoria, cioè la lunghezza **a** al di sotto della quale essa perde validità.
Affinché **a** possa tendere a zero anche **M** dovrebbe dunque tendere a zero in unità della scala $\mathbf{M_{max}}$

Tale valore massimo di **M** corrisponde a

$$\mathbf{a(M_{max}) \approx \frac{\hbar}{M_{max}c} \approx 10^{-17}\,cm}$$

mentre se volessimo arrivare a descrivere i fenomeni sino alla scala di unificazione delle interazioni forti, elettromagnetiche e deboli (Grand Unified Theories)

$$\mathbf{a_{GUT} \approx 10^{-29}\,cm}$$

M non potrebbe superare il valore di 200 masse protoniche.

L'idea che il grado di località **a** non possa tendere a zero sembra essere suffragata anche da alcuni studi rigorosi della teoria. Essi, pur non coprendo tutte le possibili fasi della teoria (ed in particolare proprio la fase in cui il campo acquista un valore di aspettazione nel vuoto), suggeriscono come il modello delle sferette rigide sia tecnicamente 'banale' ('trivial' in inglese) . Cioè, come modello interagente, esisterebbe solo in presenza di una lunghezza minima **a.** Quindi deve esistere un valore minimo di **a** giacché senza queste interazioni non potrebbe esserci condensazione.

Verso la fine degli anni Ottanta, questo quadro teorico è stato confrontato con il risultato di simulazioni numeriche eseguite su reticoli dell'ordine $\mathbf{10^4 \div 16^4}$ (Luescher e Weisz 1987, Kuti 1988, Lang 1993) e trovato in buon accordo con i risultati numerici. Questo è stato interpretato come una conferma ('sperimentale') ed ha anche rappresentato un importante elemento per orientare gli studi e le scelte per un acceleratore capace di rivelare la particella di Higgs.

Dopo queste premesse, si potrebbero però fare le seguenti osservazioni:

1) Prima di tutto, il limite teorico ottenuto andrebbe correttamente interpretato non come un limite assoluto ma piuttosto come condizione di consistenza della teoria perturbativa.
   Inoltre, il metodo perturbativo va sempre pensato come la soluzione di un problema di minimo locale e come tale non è l'unico mezzo per descrivere la condensazione del campo di Higgs. Per esempio, ci sono anche i metodi variazionali. In questo caso, si ottengono le stesse indicazioni ?
2) Come già detto gli argomenti rigorosi di cui sopra non coprono tutte le possibili fasi della teoria ed in particolare proprio la fase che ci interessa in cui il campo acquista un valore di aspettazione nel vuoto. Quale potrebbe essere il motivo di questa seria eccezione ? Potrebbe la presenza di un valore medio non nullo del campo fornire un nuovo scenario ?

Proprio partendo da queste osservazioni, nella serie di lavori in ref.[1], e successivamente con alcune precisazioni in ref.[2], fu formulata un'interpretazione alternativa del modello di Higgs in cui il valore del campo nel vuoto giuoca un ruolo fondamentale. Gli studi rigorosi mostrano in realtà che sono le interazioni tra i quanti della fase simmetrica che si devono annullare nel limite del continuo quando **a** tende a zero. Questo quindi non significa che non possa esserci la rottura spontanea della simmetria ed un fenomeno fisico di condensazione. Basta una corrispondente crescita della densità dei quanti elementari per compensare il fatto che le loro interazioni fondamentali a due corpi diventano infinitesime.

Una visualizzazione di questa situazione, si può ottenere utilizzando la descrizione intuitiva del condensato introdotta in Ref.[3], dove i quanti della fase simmetrica sono sferette rigide di raggio **a** (la loro lunghezza di diffusione) e densità **n**. In questa rappresentazione si trova la relazione

$$\frac{1}{\sqrt{na}} \approx \frac{\hbar}{Mc}$$

Vediamo quindi che, anche se **a** tendesse a zero, il valore di **M**, proporzionale a $\sqrt{na}$, potrebbe adesso restare finito, in unità della scala M_{max} prima introdotta, se la densità **n** crescesse opportunamente (la teoria perturbativa invece equivale ad assumere che il valore di **n** resta costante). Il ‘ limite del continuo ’ , in cui **a** tende a zero, corrisponderebbe dunque ad un sistema infinitamente diluito dove $\varepsilon \equiv na^3 \to 0$ e ad una gerarchia di scale

$$a \ll n^{-1/3} \ll \frac{1}{\sqrt{na}} \ll \frac{1}{na^2} \ll \ldots$$

Dunque **M** non misurerebbe più il grado di località della teoria con conseguenze potenzialmente importanti per gli esperimenti [4].

Questo nuovo quadro teorico motivò una nuova serie di simulazioni numeriche. Matematicamente, la crescita della densità si traduce in un re-scaling non banale del valore del campo nel vuoto così che adesso è la combinazione

$$\langle \Phi \rangle_R = \langle \Phi \rangle \sqrt{\varepsilon} \ll \langle \Phi \rangle$$

che andrebbe legata alla costante di Fermi. In questo caso, gli stessi dati numerici potevano essere interpretati in due modi diversi. Per esprimere con chiarezza questo concetto, riporto testualmente alcune frasi dall’introduzione di ref.[5] :

“ Mentre una sostanziale esperienza è stata già ottenuta nell’analisi numerica di teorie di campo su reticolo, l’affidabilità delle conclusioni sui loro limiti del continuo è tuttora motivo di discussione giacché l’equivalenza di diverse procedure per ottenere quei limiti non è ancora controllata da condizioni teoriche ben definite. Questo richiede di spostare il problema dal livello di mera computazione, inclusa la valutazione degli errori numerici e delle approssimazioni, a quello della interpretazione, esplorando la connessione dei risultati numerici con la teoria formale o con opportuni modelli del limite del continuo”.

Successivamente, nuove simulazioni [6] non solo confermavano questa equivalenza sostanziale ma addirittura sembravano leggermente privilegiare il nuovo schema anche se le evidenze numeriche non potevano essere considerate decisive. A tale scopo sembrava importante usare reticoli sostanzialmente più grandi di quelli $24^4 \div 32^4$ da noi utilizzati. Questo non era semplice giacché l’algoritmo necessario per simulare il sistema di Higgs (il codice ‘cluster’), per poter risolvere alcuni problemi posti dal reticolo finito, ha delle proprietà non locali che non lo rendono adatto al calcolo parallelo.

Questo problema di utilizzare reticoli grandi sembra naturale in un approccio dove proprio la condensazione dei quanti elementari nel modo di momento nullo gioca un ruolo cruciale. Si noti che, con condizioni al contorno periodiche, esiste sempre il modo che ha un impulso zero e corrisponde ad un valore medio non nullo del campo. Ma se la dimensione lineare **L** del reticolo è troppo piccola i primi valori di momento diverso da zero (che vanno come 1/**L**) sono 'troppo grandi' e 'troppo pochi' per poter rendere conto della densità degli stati di eccitazione del condensato.

Quindi gli usuali calcoli su reticolo, fatti nella prospettiva in cui **M** sia la sola scala interessante, troncano la gerarchia in un modo incontrollato. Per capire meglio questa affermazione, ricordiamo che la lunghezza $1/(\sqrt{\mathbf{na}})$ descrive la dimensione trasversale dei vortici più sottili (i 'filamenti vorticosi') che si possono stabilire in un mezzo superfluido con dati **n** ed **a.** Questi descrivono eccitazioni del sistema in una regione di lunghezze d'onda intermedie. Solo per lunghezze d'onda più grandi, maggiori del libero cammino medio $1/(\mathbf{na}^2)$, cominciano le oscillazioni collettive di densità che, nell'elio superfluido, corrispondono ai fononi. Esiste qualcosa di analogo nel condensato di Higgs nel limite di grandi lunghezze d'onda ovvero nel limite di impulsi spaziali che tendono a zero ?

Secondo la teoria perturbativa lo spettro di eccitazione è puramente massivo. Esisterebbe dunque una lunghezza di correlazione data circa da $\hbar/(\mathbf{Mc})$ al di là della quale il vuoto dovrebbe autoreplicarsi in modo banale. Oltre la teoria perturbativa però si deve tener conto di una peculiarità dello stato di momento nullo : questo limite non è univocamente definito ma ammette due soluzioni (una con massa **M** ed una con massa zero) a causa della fondamentale non-analiticità associata al fenomeno di rottura spontanea della simmetria in un volume infinito.

Quindi, con due soluzioni, è come se ci fossero due tipi di particelle : i) eccitazioni massive che sono le solite particelle di Higgs considerate sinora e ii) modi di massa zero che si manifestano solo nel limite di volume infinito. Per il sistema di Higgs, essi possono essere considerati l'analogo dei due tipi di eccitazione, fononi e rotoni, che sono noti nell'elio superfluido.

Ma questo non sembra potersi dedurre in nessun modo dalle simulazioni numeriche esistenti. Infatti, a questo scopo si dovrebbe andare in regioni così grandi da contenere lunghezze d'onda per cui si esce dalla regione dei vortici ed il sistema comincia a reagire con oscillazioni di densità. Questa nuova regione si manifesta su una distanza finita nel caso dell'elio superfluido dove $\mathbf{na}^3 \approx \mathbf{1}$ ma diventa asintoticamente grande nel caso del condensato di Higgs definito per $\mathbf{na}^3 \to \mathbf{0}$. Per avere un'idea, il caso fisico non dovrebbe essere molto distante dai valori $\mathbf{a} \approx \mathbf{10}^{-29}\,\mathbf{cm}$ (che corrisponde alla scala di unificazione delle interazioni forti, elettromagnetiche e deboli) e

$$\frac{\hbar}{\mathbf{Mc}} \approx \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{na}}} \approx \mathbf{10}^{-17}\,\mathbf{cm}$$

e quindi da un valore

$$(\sqrt{\mathbf{na}^3})_{\mathbf{fisico}} \approx \left(\frac{\mathbf{aMc}}{\hbar}\right)_{\mathbf{fisico}} \approx \mathbf{10}^{-12}$$

Questo numero darebbe il rapporto tra la dimensione della regione dei vortici e quella della regione dove si cominciano a manifestare le piccole oscillazioni di densità intorno al valore di **n** di stabilità.

Per tentare di simulare il sistema su reticolo, naturalmente, i valori devono essere molto diversi. In questo caso, la dimensione lineare minima richiesta per vedere i primi segni di oscillazioni collettive di densità può essere stimata [8]

$$\left(\frac{\mathbf{L_{min}}}{\mathbf{a}}\right)_{\mathbf{reticolo}} \approx \mathbf{123, 192, 342, 769, 3074}$$

rispettivamente per i valori

$$(\sqrt{\mathbf{na^3}})_{\mathbf{reticolo}} \approx \left(\frac{\mathbf{aMc}}{\hbar}\right)_{\mathbf{reticolo}} = \mathbf{0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1}$$

Anche con i calcolatori più veloci disponibili oggi, simulazioni ad alta statistica sul reticolo più piccolo richiederebbero alcuni anni lavorando senza soste giorno e notte (come già detto il codice ‘cluster’ ha aspetti non locali che lo rendono poco adatto al calcolo parallelo). Gli altri casi sono invece improponibili a meno di non mettere in piedi un progetto dove il tempo macchina venisse distribuito su molti calcolatori. Comunque, anche se la statistica totale fosse raccolta su molte macchine, un livello sufficiente dovrebbe essere raccolto su ogni singola macchina.

Bisognerebbe infine tener conto che in un sistema finito di elio superfluido, i fononi si propagano imperturbati sull’intera distanza del recipiente nel limite di temperatura zero. Però in un sistema veramente infinito anche i fononi avranno un loro cammino medio, grande ma finito. Questo finirebbe col produrre deviazioni dalla linearità su grandi distanze e variazioni significative della densità **n** che potrebbero essere importanti per descrivere le forme di aggregazione della materia su scale astronomiche (se il condensato di Higgs deve spiegare l’origine della massa). In questo caso ci sarebbero scale di lunghezza ancora maggiori indicate con dei puntini nella sopra citata catena di diseguaglianze.

Così si arriva a dedurre una fondamentale inadeguatezza delle simulazioni numeriche. Questa conclusione non dovrebbe poi essere così sorprendente, nel caso specifico, se tale sistema deve realmente fornire un modello per il vuoto cosmico. La curiosità sta semmai nell’uso del termine tecnico ‘triviality’ che viene adottato per descrivere il modello delle sferette rigide e che, invece, risulta proprio essere alla base della sua natura gerarchica.

Riferimenti:

[1] P. Castorina e M. Consoli, Phys.Lett. **B235** (1990) 302; V. Branchina, P. Castorina, M. Consoli e D. Zappala', Phys. Rev. **D42** (1990) 3587; V. Branchina, P. Castorina, M. Consoli e D.Zappala', Phys.Lett. **B274** (1992) 404; V. Branchina, M. Consoli e N. M. Stivala, Zeit. Phys. **C57** (1993) 251.
[2] M. Consoli and P. M. Stevenson, Zeit. Phys. **C63** (1994) 427; Phys. Lett. **B391** (1997) 144.
[3] M. Consoli e P. M. Stevenson, Int. Jour. Mod. Phys. **A15** (2000) 133.
[4] P. Castorina, M. Consoli e D. Zappala', J. Phys. G. Nucl. Part. Phys. **35** (2008) 075010.
[5] A. Agodi, G. Andronico and M. Consoli, Zeit. Phys. **C66** (1995) 439.
[6] A. Agodi, G. Andronico, P. Cea, M. Consoli, L. Cosmai, R. Fiore e P. M. Stevenson: Mod. Phys. Lett. **A12** (1997) 1011; A. Agodi, G. Andronico, P. Cea, M. Consoli, L. Cosmai, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **63** (1998) 637; P. Cea, M. Consoli and L. Cosmai; Mod. Phys. Lett. **A13** (1998) 2361; P. Cea, M. Consoli e L. Cosmai; Nucl. Phys. Proc. Suppl. **73** (1999) 727; P. Cea, M. Consoli, L. Cosmai e P. M. Stevenson, Mod. Phys. Lett. **A14** (1999) 1673.
[7] M. Consoli, Phys. Lett. **B512** (2001) 335 ; Phys. Rev. **D65** (2002) 105017
[8] M. Consoli, Phys. Lett. **B672** (2009) 270.